GRUNDLAGEN

FÜR DIE

GEOMETRISCHE ANWENDUNG

DER

INVARIANTENTHEORIE

VON

DR. P. MUTH.

MIT EINEM BEGLEITWORTE VON **M. PASCH.**

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1895.

Begleitwort.

Wenn man mit dem Vortrag der Invariantentheorie geometrische Anwendungen verbindet, so muss man gewisse Kenntnisse aus der analytischen Geometrie voraussetzen, die keinen grossen Umfang haben, über die jedoch der Anfänger meist nicht, oder nicht mit hinreichender Sicherheit verfügt: Homogene Coordinaten, uneigentliche Elemente, lineare Substitution, projektive Coordinaten, Parameterdarstellung in den Grundgebilden, Dualität u. s. w. Dass der Studirende aus Büchern hierüber Belehrung schöpft, wird man häufig nicht erwarten können und alsdann dem Vortrag einen besonderen, auf die erwähnten Gegenstände bezüglichen Abschnitt einfügen müssen. Diese Gegenstände hängen mit einander eng zusammen. Bei dem Versuche, sie nach ihren Zusammenhängen zu entwickeln und die Allgemeinheit, welche die Vorstellungen allmählich gewonnen haben, zu begründen, empfindet man, dass in dieser Richtung auf dem Gebiete der analytischen Geometrie bisher weniger geschehen ist, als auf den übrigen Gebieten der Mathematik. Herr Dr. Muth hat es unternommen, diese Lücke durch eine wohlumgrenzte kleine Schrift auszufüllen. Er hat es sich zur Aufgabe gemacht, den Leser auf eine Reihe von Fragen, welche für ein klares Verständniss der modernen analytischen Geometrie wichtig sind, hinzuweisen und ihm darüber Aufschluss zu geben. Der Inhalt des Buches bereitet daher nicht bloss für die geometrische Anwendung der Invariantentheorie vor, sondern er ist auch geeignet, als selbständiger Stoff reifere Leser zu beschäftigen.

Giessen, 12. September 1894.

M. Pasch.

Vorwort.

Wie aus dem Begleitworte, welches Herr Prof. Dr. M. Pasch in Giessen meiner Schrift voranzustellen die Güte hatte, hervorgeht, verfolgt dieselbe einen doppelten Zweck, einen didaktischen und einen rein wissenschaftlichen.

Mit Rücksicht auf den ersteren geht dieselbe von einfachen Betrachtungen in der Geraden aus, um dann zu complicirteren in der Ebene und im Raume aufzusteigen. Vorausgesetzt wird dabei nur das Bekannteste aus der Determinantenlehre und analytischen Geometrie, aus letzterer im Grunde nur der Coordinatenbegriff. Die Elemente der projektiven Geometrie werden, sowie es der eingeschlagene Gang und die analytische Behandlungsweise mit sich bringen, in der Schrift selbst nach und nach entwickelt. Bei Einführung der Grundgebilde der neueren Geometrie habe ich, abweichend von der Staudt'schen Ausdrucksweise, das Strahlenbündel einfach „Bündel" genannt. Ferner bezeichne ich Figuren in einförmigen Grundgebilden zusammenfassend als „einförmige Figuren". Nachdem in den Grundgebilden lineare oder Doppelverhältnisscoordinaten eingeführt worden sind, wird die doppelte Bedeutung der linearen Substitution für die projektive Geometrie eingehend erörtert. Von besondern projektiven Verwandtschaften werden nur die perspektiven näher in Betracht gezogen. Auch auf die Involutionen glaubte ich etwas genauer eingehen zu sollen. Ein ausführliches Sachregister erleichtert das Nachschlagen.

Metrische Begriffe werden nur in der Geraden durchweg mit in Betracht gezogen, und es mögen diese Ausführungen als Muster dafür dienen, wie nach meiner Ansicht die analytische Geometrie überhaupt in einwurfsfreier Weise aufgebaut werden könnte. Die grossen Schwierigkeiten, welche sich hierbei bemerkbar machen, zeigen sich so recht deutlich gerade

bei diesen einfach zu übersehenden Verhältnissen der beiden ersten Paragraphen. Es gilt eben die Definitionen, Festsetzungen u. s. w. so zu fassen, dass sich nirgends Abhängigkeit oder Widerspruch zeigt.

Wenn nun die folgenden Blätter den weiteren Zweck verfolgen, wenigstens einen Theil der analytischen Geometrie — die projektive Geometrie — in aller Strenge zu begründen, so zeigen sich die eben angedeuteten Schwierigkeiten insbesondere bei den Definitionen der Raumelemente, der Incidenz von Elementen u. s. w. in § 6. Theoretisch genommen müssten diese Definitionen freilich den Ausgangspunkt bilden, doch wurde der eingeschlagene Gang theils aus didaktischen Gründen, theils deshalb vorgezogen, weil beim Absteigen zur Ebene und Geraden die Fülle der zu bringenden Einzelnheiten die Einheit der Entwicklungen stört. Nicht versäumt wurde aber, stets auf den Zusammenhang mit dem Vorhergehenden hinzuweisen und ihn an geeigneter Stelle wirklich herzustellen. Zugleich ist dadurch der Weg angedeutet, auf welchem man vorzugehen hat, wenn man — etwa bei akademischen Vorträgen — bei Behandlung unseres Stoffes vom Raume auszugehen versucht.

Unter den eben erwähnten Definitionen bereitet diejenige der Geraden (Def. δ in § 6) besondere Schwierigkeiten, da sie sich selbst dualistisch und so gefasst sein muss, dass die Folgerungen mit Sicherheit gezogen werden können. Indessen hoffe ich, dass eben jene Definitionen und die Herleitung der Stammsätze der projektiven Geometrie aus ihnen allein für den Mathematiker als Logiker von besonderem Interesse sein werden.

Zum Schlusse fühle ich mich gedrungen, Herrn Professor Dr. Pasch, welcher mich bei der Herstellung dieser Schrift unermüdlich aufs Thatkräftigste unterstützt hat, auch an dieser Stelle meinen wärmsten Dank zu sagen.

Osthofen (Rheinhessen), 26. Sept. 1894.

P. Muth.

Inhaltsverzeichniss.

§ 1. Das Doppelverhältniss.

1. Nehmen wir in einer Geraden, in welcher eine Richtung als positiv festgesetzt ist, eine Strecke AB und einen Punkt C beliebig an, so besteht mit Berücksichtigung des jeder Strecke beizulegenden Vorzeichens die Beziehung

$$AB = AC + CB.$$

Man sagt deshalb, die Strecke AB werde im Punkte C in die Strecken AC und CB getheilt. Das Verhältniss der Theilstrecken $\frac{AC}{CB}$ heisst das Theilverhältniss der Strecke AB im Punkte C. Dasselbe ist positiv oder negativ, je nachdem C der Strecke AB angehört oder nicht, es ist Null im Punkte A, Unendlich im Punkte B, Eins im Mittelpunkte der Strecke AB.

Soll die Strecke AB in einem Punkte C nach vorgeschriebenem Verhältnisse k getheilt werden, so bestimmt man C eindeutig aus den Gleichungen

$$\frac{AC}{CB} = k, \quad AC + CB = AB.$$

Es wird

$$AC = \frac{k \cdot AB}{k+1}, \quad CB = \frac{AB}{k+1}. \tag{1}$$

Für k können wir jede reelle Zahl setzen, ausser -1, welch' letztere vor der Hand auszuschliessen ist.

2. Ziehen wir neben C noch einen Punkt D der Geraden AB in Betracht, so nennt man das Verhältniss der Theilverhältnisse, welche die Punkte C und D (in dieser Reihenfolge) an der Strecke AB hervorrufen, also

$$\frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB} = \frac{AC \cdot BD}{AD \cdot BC} \tag{2}$$

das Doppelverhältniss, nach welchem die Strecke AB in den Punkten C und D getheilt wird, oder auch das Doppel-

verhältniss der Strecken AB und CD, der Punktepaare AB und CD, oder noch kürzer, das Doppelverhältniss der vier Punkte $ABCD$ (zunächst nur in dieser Reihenfolge).

Das Doppelverhältniss (DV) von $ABCD$ bezeichnet man mit $(ABCD)$, wobei die Punkte $ABCD$ zunächst in dieser Reihenfolge zu schreiben sind. Die Punkte C und D dürfen nicht gleichzeitig nach A oder B fallen, damit das DV nicht unbestimmt wird. Dasselbe ist negativ oder positiv, je nachdem A und B durch C und D getrennt werden oder nicht.

Ist $(ABCD) = -1$, also $\frac{AC}{CB} = -\frac{AD}{DB}$, so sagt man, die Strecke AB werde durch die Strecke CD oder in den Punkten C und D harmonisch getheilt, das Punktepaar AB werde durch das Punktepaar CD harmonisch getrennt, oder man sagt kurz, die vier Punkte $ABCD$ liegen harmonisch.

Für verschiedene Punkte ABC ist ferner nach (2), wenn D gleich A, B, C genommen wird, bez.

$$(ABCA) = \infty, \quad (ABCB) = 0, \quad (ABCC) = 1.$$

Der Punkt D kann überhaupt bei gegebenen, verschieden gelegenen Punkten ABC so bestimmt werden, dass $(ABCD)$ einen vorgeschriebenen Werth k annimmt. Aus den Gleichungen

$$\frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB} = k, \quad AD + DB = AB$$

findet man nämlich

$$AD = \frac{AB \,.\, AC}{AC + k \,.\, CB}, \quad DB = \frac{k \,.\, AB \,.\, CB}{AC + k \,.\, CB} \tag{3}$$

und somit einen bestimmten Punkt D zu jedem reellen Werthe von k, ausser dem Werthe $\frac{AC}{BC}$, welcher bis auf Weiteres ausgeschlossen werden muss.

3. Um die Geometrie in der Geraden weiter analytisch behandeln zu können, müssen wir ein *Coordinatensystem* in derselben einführen. Wir wählen ein Abscissensystem, welches bekanntlich durch den Nullpunkt (NP) O und den Einheitspunkt (EP) E festgelegt ist. In diesem mit OE zu bezeichnenden Systeme besitzt ein Punkt P die Abscisse $\frac{OP}{OE}$, welche wir mit P bezeichnen wollen.

Sind zwei Punkte A und B mit den resp. Abscissen A und B gegeben, so wird die Strecke (die Entfernung, der Abstand)

$$(4) \quad AB = OB - OA = \frac{OB - OA}{OE} \cdot OE = (B - A) \,.\, OE,$$

mithin wird, wenn drei Punkte ABC gegeben sind, das Theilverhältniss der Strecke AB im Punkte C (Absc. C)

$$(5) \qquad \frac{AC}{CB} = \frac{C - A}{B - C},$$

also, wenn vier Punkte $ABCD$ gegeben sind,

$$(6) \qquad (ABCD) = \frac{(A - C)\,(B - D)}{(A - D)\,(B - C)},$$

wo D die Abscisse von D bedeutet.

Bezieht man einen Punkt P einmal auf ein System OE, das andere Mal auf ein System $O'E'$, so sind die Abscissen P und P' von P im ersten bez. im zweiten System durch eine lineare Gleichung

$$(7) \qquad P' = \alpha P + \beta$$

verknüpft. Die Constanten α und β hängen nur von der Lage der Punkte OE gegen die Punkte $O'E'$ ab.

4. Die Abscisse P kann man immer in Bruchform schreiben, also $P = \frac{P_1}{P_2}$ setzen; P_1 und P_2 sind endlich und nicht gleichzeitig Null. Man kann alsdann P_1 und P_2 ebenfalls Coordinaten von P nennen und zwar der Abscisse P entsprechende homogene Coordinaten. Denn:

Veränderliche $P_1, P_2, P_3 \ldots ., P_n$ ($n > 1$) heissen überhaupt homogen, wenn dieselben 1) nur endliche Werthe annehmen, 2) nicht alle gleichzeitig Null werden und wenn 3) Werthesysteme $P_1 | P_2 | \ldots . | P_n$ und $\varrho P_1 | \varrho P_2 | \ldots . | \varrho P_n$, wo ϱ weder Null noch Unendlich ist, gleichbedeutend sind.

Insbesondere heissen für $n = 2$ die homogenen Veränderlichen binär, bei $n = 3$ ternär, bei $n = 4$ quaternär u. s. w.

Die oben eingeführten Coordinaten $P_1 | P_2$ sind also homogene binäre Coordinaten des Punktes P.

Die Punkte $P_1 | P_2$ und $Q_1 | Q_2$ sind identisch unter der Bedingung $(PQ) = 0$, wo (PQ) die Determinante

$$\begin{vmatrix} P_1 & P_2 \\ Q_1 & Q_2 \end{vmatrix}$$

vorstellen soll.

Der NP O hat die homogenen binären Coordinaten $0 \mid 1$, der EP die Coordinaten $1 \mid 1$.

Setzen wir in (7) $P = \frac{P_1}{P_2}$, $P' = \frac{P_1'}{P_2'}$, so können wir schreiben

$$\varrho P_1' = \alpha P_1 + \beta, \quad \varrho P_2' = P_2,$$

wo ϱ weder Null noch Unendlich ist. Nehmen wir wieder $\varrho P_1' = P_1'$, $\varrho P_2' = P_2'$, so haben wir

$$\begin{aligned} P_1' &= \alpha P_1 + \beta P_2, \\ P_2' &= \qquad\quad P_2. \end{aligned} \tag{8}$$

Die umgekehrte Transformation wird mittelst der Formeln

$$\begin{aligned} P_1 &= P_1' - \beta P_2', \\ P_2 &= \qquad \alpha P_2' \end{aligned} \tag{9}$$

ausgeführt.

Die Substitutionsformeln (8) bez. (9) dienen zum Uebergang von einem Systeme homogener Abscissen zu einem Systeme ebensolcher Coordinaten.

5. Nach dem Vorhergehenden können die Zahlen P_1 und P_2 nur so gebraucht werden, dass $\frac{P_1}{P_2}$ reell und endlich wird. Von dieser Beschränkung befreien wir uns durch folgende erweiterte Definition des Begriffes „Punkt“:

Jedes System reeller, imaginärer oder complexer Werthe der homogenen Veränderlichen $P_1 \mid P_2$ soll fortan ein in dem zu Grunde gelegten Coordinatensysteme mit den homogenen Coordinaten $P_1 \mid P_2$ behafteter **Punkt** unserer Geraden genannt werden.

Wir setzen fest, dass die so hinzugefügten Coordinaten mittelst derselben Formeln transformirt werden, wie die früheren. Ferner heisse $\frac{P_1}{P_2} = P$ wieder die Abscisse des Punktes $P_1 \mid P_2$, den wir auch mit P bezeichnen wollen.

Ist die Abscisse reell, so heisst der Punkt reell, ist dieselbe nicht reell, so heisst der Punkt imaginär. Sind die

Abscissen P und Q conjugirt imaginäre Zahlen, so heissen die Punkte P und Q conjugirt imaginäre Punkte.

Nach (9) besitzen die Punkte $O'E'$ im Abscissensysteme OE die homogenen Coordinaten $-\beta \mid \alpha$, $1-\beta \mid \alpha$. Wir sagen nun, dass durch die Formeln (8) bez. (9) auch dann eine Transformation der Abscissen vollzogen werde, wenn die Punkte $O' = -\beta \mid \alpha$ und $E' = 1-\beta \mid \alpha$ imaginär werden.

Die zuletzt den Punkten gegebenen Benennungen gelten nur, so lange man bei Abscissen mit reellem NP und EP bleibt.

6. Entsprechend der Definition des Punktes im vorigen Artikel werden wir auch den Begriff „Strecke" oder „Entfernung" erweitern. Wir haben in 4 die Strecke AB aus den Abscissen A und B in einem Systeme OE berechnet. Setzen wir, um in (4) homogene Coordinaten einzuführen, $A = \frac{A_1}{A_2}$, $B = \frac{B_1}{B_2}$, so wird

$$B - A = \frac{(B\,A)}{B_2 A_2},$$

mithin

$$AB = \frac{(B\,A)}{B_2 A_2} \cdot OE. \tag{10}$$

Durch letztere Gleichung definiren wir die Strecke jetzt aufs Neue, indem wir unter $A_1 \mid A_2$ und $B_1 \mid B_2$ Punkte im Sinne des vorigen Artikels verstehen und nach wie vor von einer durch diese Punkte bestimmten Strecke (Entfernung, von einem Abstand, einer Länge) AB sprechen.

Die Strecke bleibt auch bei dieser Definition derselben unabhängig vom zufällig gewählten Abscissensysteme, d. h. sie hängt nur von den Coordinaten der die Strecke bestimmenden Punkte, nicht aber von den das Abscissensystem bestimmenden Daten ab. Denn bedeuten $A_1' \mid A_2'$ und $B_1' \mid B_2'$ die homogenen Coordinaten von A und B in einem anderen Systeme $O'E'$, so ist nach (9)

$$A_1 = A_1' - \beta A_2', \quad A_2 = \alpha A_2'$$

u. s. w. zu setzen und (10) geht dadurch zunächst in

$$AB = \frac{(B'A')}{B_2' A_2'} \cdot \frac{OE}{\alpha}$$

über. O' hat aber nach (9) im Systeme OE die Coordinaten $-\beta \mid \alpha$, E' die Coordinaten $1-\beta \mid \alpha$, also ist nach (10)

$$O'E' = \frac{OE}{\alpha}$$

und somit in der That

$$AB = \frac{(B'A')}{B_2'A_2'} \cdot O'E'.$$

Der Punkt P hat nach (10) vom NP $0 \mid 1$ die Entfernung

$$OP = \frac{P_1}{P_2} \cdot OE = P \cdot OE.$$

Für einen beliebigen Punkt P ist also wieder in jedem Abscissensysteme OE die Abscisse $P = \frac{OP}{OE}$.

Der Punkt $1 \mid 0$ ist dadurch ausgezeichnet, dass er in jedem Systeme die nämliche Abscisse ∞ besitzt, wie aus (8) hervorgeht. Seine Entfernung von jedem anderen Punkte der Geraden ist nach (10) Unendlich; er heisst deshalb der unendlich ferne Punkt der Geraden und wird ein uneigentlicher Punkt genannt, während die übrigen reellen Punkte eigentliche Punkte der Geraden heissen.

Zwischen den durch drei Punkte ABC bestimmten Strecken AB, AC, CB — Punkt, Strecke fortan im erweiterten Sinne — besteht nach wie vor die Beziehung

$$AB = AC + CB,$$

so dass wir wieder von einer Theilung der Strecke AB im Punkte C (z. B. einer Halbirung von AB im Punkte $A_1B_2 + A_2B_1 \mid 2A_2B_2$), ferner von einem Theilverhältnisse $\frac{AC}{CB}$ der Strecke AB im Punkte C, definirt durch die aus (10) sich ergebenden Gleichung

$$\text{(11)} \qquad \frac{AC}{CB} = \frac{(AC)}{(CB)} \cdot \frac{B_2}{A_2}$$

sprechen können. Dasselbe ist unabhängig vom Abscissensysteme.

Jede Strecke wird nach (11) im unendlich fernen Punkte $1 \mid 0$ nach dem Verhältnisse -1 getheilt; *das Theilverhältniss* -1 *braucht fortan nicht mehr ausgeschlossen zu werden,* wie es in **1** geschah.

7. Mit Hülfe der Gleichung (11) finden wir weiter die Gleichung

$$(ABCD) = \frac{(AC)\,(BD)}{(AD)\,(BC)}, \tag{12}$$

welche das DV für vier beliebige Punkte $ABCD$ unserer Geraden definirt; auch das DV ist vom Abscissensysteme unabhängig.

Wir dehnen nunmehr den Begriff der Trennung auf beliebige Punktepaare aus, indem wir sagen, dass die Punkte AB durch die Punkte CD getrennt oder nicht getrennt werden, je nachdem $(ABCD)$ negativ oder positiv ist. Insbesondere sprechen wir bei $(ABCD) = -1$ von harmonischer Lage der Punkte $ABCD$ oder auch von harmonischer Trennung der Punkte AB durch die Punkte CD, wie in 2.

Folgende specielle DVe mögen noch betrachtet werden. Nehmen wir

1) für C den Mittelpunkt der Strecke AB, so folgt aus (12)

$$(BACP) = \frac{(AP)}{(PB)} \cdot \frac{B_2}{A_2};$$

nach (11) ist aber

$$\frac{AP}{PB} = \frac{(AP)}{(PB)} \cdot \frac{B_2}{A_2},$$

also

$$(BACP) = \frac{AP}{PB}.$$

Das Theilverhältniss einer Strecke AB im Punkte P kann somit als ein DV aufgefasst werden, welches die Punkte BA, der Mittelpunkt von AB und der Punkt P bestimmen. Setzen wir

2) in (12) $A = P$, $B = E$, $C = O$ und $D = U$, wo U der unendlich ferne Punkt $1\,|\,0$ unserer Geraden bedeute, so wird mit Rücksicht auf (11) und (10)

$$(PEOU) = \frac{(PO)}{(EO)} \cdot \frac{E_2}{P_2} = -\frac{PO}{OE} = \frac{OP}{OE}.$$

Da nunmehr ein DV $\frac{OP}{OE}$ auftritt, *so ist die in Artikel 2 gemachte Beschränkung aufgehoben.* Ferner erkennt man, *dass die Abscisse P eines Punktes P im Systeme OE als ein DV betrachtet werden kann,* welches P mit dem EP, dem NP und dem unendlich fernen Punkte bestimmt.

3) Bei gleicher Bezeichnung, wie in 2), ergiebt sich aus den angeführten Gleichungen

$$(OUEP) = \frac{(OE)}{(OP)} \cdot \frac{P_2}{E_2} = \frac{OE}{OP},$$

d. h. die reciproke Abscisse des Punktes P in einem Systeme OE ist ein DV, welches der NP, der unendlich ferne Punkt und der EP mit dem Punkte P bestimmen.

4) Ist C der Mittelpunkt von AB und U der unendlich ferne Punkt der Geraden, so wird nach (12)

$$(ABCU) = -1,$$

d. h.: *Jede Strecke wird im Mittelpunkte und im unendlich fernen Punkte harmonisch getheilt.*

5) Vier Punkte

$$A_1 | A_2, \quad B_1 | B_2, \quad A_1 + \varrho B_1 | A_2 + \varrho B_2, \quad A_1 + \sigma B_1 | A_2 + \sigma B_2$$

haben nach (12) das DV $\frac{\varrho}{\sigma}$.

Bei $\sigma = -\varrho$ wird $\frac{\varrho}{\sigma} = -1$, also liegen vier Punkte

$$A_1 | A_2, \quad B_1 | B_2, \quad A_1 + \varrho B_1 | A_2 + \varrho B_2, \quad A_1 - \varrho B_1 | A_2 - \varrho B_2$$

harmonisch. Insbesondere liegen die Punkte

$$A_1 | A_2, \; B_1 | B_2, \; A_1 + \sqrt{-1}\, B_1 | A_2 + \sqrt{-1}\, B_2, \; A_1 - \sqrt{-1}\, B_1 | A_2 - \sqrt{-1}\, B_2$$

harmonisch. Sind A und B reelle Punkte, so werden dieselben also hier durch conjugirt imaginäre Punkte harmonisch getrennt.

8. Da vier Elemente vierundzwanzig Permutationen zulassen, so können wir mit vier Punkten vierundzwanzig DVe bilden. Aus (12) geht aber hervor, *dass das DV ungeändert bleibt,* 1) wenn man in den Paaren AB und CD die Elemente gleichzeitig vertauscht, 2) wenn man jene Paare selbst vertauscht und somit auch, wenn man 3) beide Handlungen gleichzeitig vornimmt. Wir ersehen ferner aus (12), *dass das DV in den reciproken Werth übergeht,* wenn man die Elemente eines Paares vertauscht.

Nach Vertauschung der inneren oder äusseren Elemente erhält man den Werth des DV, *indem man den ursprünglichen*

von Eins abzieht. Denn es ist für $A_x = A_1 x_1 + A_2 x_2$ u. s. w. identisch

$$\begin{vmatrix} A_x & A_1 & A_2 \\ B_x & B_1 & B_2 \\ C_x & C_1 & C_2 \end{vmatrix} = A_x (BC) + B_x (CA) + C_x (AB) = 0.$$

Für $x_1 = D_2$, $x_2 = -D_1$ kommt folglich

$$(AD)\,(BC) + (BD)\,(CA) + (CD)\,(AB) = 0,$$

$$\frac{(AC)\,(BD)}{(AD)\,(BC)} + \frac{(AB)\,(CD)}{(AD)\,(CB)} = (ABCD) + (ACBD) = 1,$$

w. z. b. w.

Setzt man $(ABCD) = \lambda$, so ergeben die eben entwickelten Sätze folgende Zusammenstellung:

$$(13)\quad \begin{aligned} (ABCD) &= (BADC) = (CDAB) = (DCBA) = \lambda, \\ (ABDC) &= (BACD) = (DCAB) = (CDBA) = \frac{1}{\lambda}, \\ (ACBD) &= (CADB) = (BDAC) = (DBCA) = 1 - \lambda, \\ (ADBC) &= (DACB) = (BCAD) = (CBDA) = \frac{\lambda - 1}{\lambda}, \\ (ACDB) &= (CABD) = (DBAC) = (BDCA) = \frac{1}{1 - \lambda}, \\ (ADCB) &= (DABC) = (CBAD) = (BCDA) = \frac{\lambda}{\lambda - 1}. \end{aligned}$$

Diese *sechs Werthe* sind im Allg. verschieden und nur bei besonderen Lagen können gleiche darunter auftreten. Soll etwa $\lambda = \frac{1}{\lambda}$ werden, so können wir

a) $\lambda = 1$ wählen und es treten alsdann nur die *drei Werthe:* 1, 0, ∞ auf, jeder Werth tritt zweimal auf. Dieser Fall ist für eigentliche Punkte bereits in 2 berührt worden. Für

b) $\lambda = -1$ erhält man dagegen $-1, 2, \frac{1}{2}$, also wieder *drei Werthe* des DV, jeden gleich oft. Acht Anordnungen sind also dann *harmonisch* (7). Ferner kann

c) $\lambda = \frac{\lambda - 1}{\lambda}$ oder $\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$ werden. Aus dieser Gleichung folgt $\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} = -\varepsilon$ oder $-\varepsilon^2$, wo ε eine complexe dritte Wurzel aus 1 bedeutet. Für $\lambda = -\varepsilon$ erhält man nur *2 Werthe* des DV, $-\varepsilon$ und $-\varepsilon^2$, jeden zwölfmal.

In diesem Falle sagt man, die vier Punkte liegen **äquianharmonisch**. Zu drei reellen Punkten unserer Geraden giebt es immer zwei conjugirt imaginäre, deren jeder mit den dreien äquianharmonisch liegt, wie in **10** gezeigt werden wird.

Setzt man irgend zwei andere der sechs Werthe (13) gleich, so wird man wieder auf einen der drei behandelten Fälle geführt. Es treten also sonst immer sechs DVe auf.

§ 2. Lineare Coordinaten in der Geraden.

9. Es sei wieder $P = \frac{P_1}{P_2}$ die Abscisse des auf einer bestimmten Geraden beweglichen Punktes P in einem beliebigen Systeme OE, ferner p eine lineare, ganze oder gebrochene, eigentliche Funktion von P, etwa

$$p = \frac{\alpha P + \beta}{\gamma P + \delta} \text{ d. i. } \frac{\alpha P_1 + \beta P_2}{\gamma P_1 + \delta P_2}. \tag{14}$$

Die Determinante

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma,$$

welche wir mit Δ bezeichnen, darf nicht verschwinden. Denn bei $\Delta = 0$ wird $p = \frac{\beta}{\delta} = \frac{\alpha}{\gamma}$, also p von P unabhängig.

Jedem Punkte P ist durch (14) eine Zahl p zugeordnet. Ist umgekehrt p bekannt, reell oder nicht reell, endlich oder unendlich, so erhält man vermöge (14) zwischen $P_1 \mid P_2$ eine lineare homogene Gleichung, d. i. eine lineare Gleichung für P, aus der man den Punkt P findet. Es wird

$$\frac{P_1}{P_2} = P = \frac{-\delta p + \beta}{\gamma p - \alpha} \tag{15}$$

und, da

$$\begin{vmatrix} -\delta & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{vmatrix} = \Delta$$

nicht Null ist, P wieder eine lineare, eigentliche Funktion von p.

Nach (15) gehören zu den Werthen ∞, 0, 1 von p der Reihe nach die Punkte $-\delta \mid \gamma$, $\beta \mid -\alpha$, $\beta - \delta \mid \gamma - \alpha$. Dieselben sind, da Δ nicht Null ist, verschieden und mögen bez. mit ABE bezeichnet werden, so dass

$$\begin{matrix} A_1 = -\delta & B_1 = \beta & E_1 = \beta - \delta = A_1 + B_1 \\ A_2 = \gamma & B_2 = -\alpha & E_2 = \gamma - \alpha = A_2 + B_2 \end{matrix}$$

zu setzen ist. Dann ist

$$(AE) = (AB), \quad (BE) = -(AB)$$

und somit

$$(AE) + (BE) = 0,$$

ferner

$$\alpha P_1 + \beta P_2 = (BP), \quad \gamma P_1 + \delta P_2 = (PA),$$

also geht (14) in

$$p = -\frac{(BP)}{(AP)} = \frac{(AE)(BP)}{(AP)(BE)}$$

und nach (12) schliesslich in

$$p = (ABEP) \tag{16}$$

über. Also ist p das DV der Punkt $ABEP$ und *jede lineare Formel in P bez. $P_1 | P_2$ stellt somit das DV des Punktes P mit drei festen Punkten ABE dar*, welche man findet, indem man p die Werthe ∞, 0, 1 annehmen lässt.

Ist umgekehrt p als DV definirt, das drei verschiedene Punkte ABE mit dem Punkte P bilden, dann ist

$$p = (ABEP) = \frac{(AE)(BP)}{(AP)(BE)},$$

also p eine lineare Funktion von P und zwar eine eigentliche, da

$$(AE)(BE) \begin{vmatrix} -B_2 & B_1 \\ -A_2 & A_1 \end{vmatrix} = (AE)(BE)(EA)$$

nicht Null ist.

Die Berechnung von P aus $(ABEP)$ wurde mit gewisser Beschränkung für eigentliche Punkte ABE schon in **2** erledigt, während jetzt ABE beliebige Punkte, p eine beliebige Zahl bedeuten.

Sind ABE drei verschiedene Punkte und ist $(ABEP) = (ABEP')$, so ist $P = P'$.

10. Vermöge der Gleichung (14) wird, wie in **9** gezeigt wurde, jedem Punkte P unserer Geraden eine Zahl p und umgekehrt zugeordnet. Wir können deshalb p Coordinate des Punktes P in einem neuen Systeme nennen. Da p das DV bedeutet, welches P mit drei festen Punkten ABE bildet,

so bezeichnen wir p als Doppelverhältnisscoordinate; A heisst der Unendlichkeitspunkt (UP) oder erste Grundpunkt, B der Nullpunkt oder zweite Grundpunkt, E der Einheitspunkt des Systems von DV-Coordinaten in der Geraden.

Drei beliebige, verschieden gelegene Punkte ABE bestimmen ein System von DV-Coordinaten, d. h. sie bestimmen die Proportion der Constanten $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta$ in der Gleichung (14). Denn durch die lineare Gleichung

$$p = (ABEP) = \frac{(AE)(BP)}{(AP)(BE)} = \frac{aP + b}{cP + d}$$

ist ein System der gewünschten Art gegeben; angenommen die lineare Gleichung

$$p = \frac{a'P + b'}{c'P + d'}$$

führe zu demselben Systeme von DV-Coordinaten, so ist

$$\frac{aP + b}{cP + d} = \frac{a'P + b'}{c'P + d'}$$

bei allen P, also

$$a : b : c : d = a' : b' : c' : d'.$$

Bedeuten nämlich u, v ganze Funktionen ohne gemeinschaftlichen Theiler, ebenso u', v' und es ist identisch

$$\frac{u}{v} = \frac{u'}{v'},$$

so giebt es eine Constante ϱ derart, dass

$$u = \varrho u', \quad v = \varrho v'$$

wird.

Von diesem allgemeinen, einfach zu beweisenden Satze wird im Folgenden öfters Gebrauch gemacht werden.

Sind p und p' conjugirt imaginäre Zahlen, ABE reelle Punkte, so sind die Punkte P und P', welche im System ABE die DV-Coordinaten p bez. p' besitzen, conjugirt imaginäre Punkte. Denn die Zahlen $\alpha\beta\gamma\delta$ in (15) sind dann reell u. s. w. Mit Rücksicht auf unsere Ausführungen in 9 ist damit das in 8, c) Behauptete bewiesen. —

11. Indem wir $p = \frac{p_1}{p_2}$ setzen und damit zu homogenen (binären) DV-Coordinaten übergehen, erhalten wir

(vergl. den analogen Uebergang in 4) statt (14) die Gleichungen:

$$p_1 = \alpha P_1 + \beta P_2,$$
$$p_2 = \gamma P_1 + \delta P_2, \tag{17}$$

statt (15) die Gleichungen

$$P_1 = -\delta p_1 + \beta p_2,$$
$$P_2 = \quad \gamma p_1 - \alpha p_2. \tag{18}$$

Mit Rücksicht auf den linearen Zusammenhang mit den Abscissen heissen die DV-Coordinaten auch lineare Coordinaten. Der Uebergang von den homogenen Abscissen $P_1 \mid P_2$ zu den homogenen DV-Coordinaten $p_1 \mid p_2$ geschieht dadurch, dass für die ersteren lineare Formen der letzteren substituirt werden, ohne dass dadurch die Unabhängigkeit der Veränderlichen $P_1 \mid P_2$ und $p_1 \mid p_2$ unter sich aufgehoben wird.

Lässt man überhaupt vermittelst n linearer Formeln

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11}x_1' + a_{21}x_2' + \cdots + a_{n1}x_n', \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n &= a_{1n}x_1' + a_{2n}x_2' + \cdots + a_{nn}x_n' \end{aligned} \tag{19}$$

mit nicht verschwindender Determinante $\sum \pm a_{11} a_{22} \ldots . a_{nn}$ an Stelle der unabhängigen homogenen Veränderlichen $x_1 \mid x_2 \mid x_3 \ldots . \mid x_n$ neue ebensolche Veränderliche $x_1' \mid x_2' \mid x_3' \ldots . \mid x_n'$ treten, so sagt man, dass vermittelst einer homogenen linearen Substitution von den x_i zu den x_i' übergegangen worden sei. Im Falle $n = 2$ heisst die homogene lineare Substitution eine binäre, bei $n = 3$ eine ternäre u. s. w. Die Constanten a_{ik} heissen die Substitutionscoefficienten, die Determinante $\sum \pm a_{11} a_{22} + \cdots a_{nn}$ wird die Substitutionsdeterminante oder der Modul der Substitution genannt.

Die lineare Substitution $x_1 = x_1'$, $x_2 = x_2'$, ... $x_n = x_n'$ heisst eine identische.

Drückt man die $x_1' \mid x_2' \mid \ldots . \mid x_n'$ durch die $x_1 \mid x_2 \mid \ldots . \mid x_n$ aus, so erhält man eine lineare Substitution, welche die inverse der ersteren genannt wird.

Die Veränderlichen x_i und x_i' hängen vermöge der Gleichungen (19) linear zusammen, wenn die Determinante derselben nicht Null ist.

Hängen Veränderliche x_i und y_i mit denselben dritten Veränderlichen x_i' linear zusammen, so hängen sie unter sich linear zusammen. Denn betrachten wir neben (19) die lineare Substitution

(20) $x_i' = b_{1i} y_1 + b_{2i} y_2 + \cdots + b_{ni} y_n \quad (i = 1, 2, \ldots n),$

so folgen aus (19) und (20) die Gleichungen

(21) $x_i = c_{1i} y_1 + c_{2i} y_2 + \cdots + c_{ni} y_n \quad (i = 1, 2, \ldots n),$

wo

$$c_{ik} = \sum b_{il} a_{lk} \quad (l = 1, 2, \ldots n).$$

Bezeichnen wir aber die Determinanten der linearen Gleichungen (19), (20), (21) bez. mit $A' B' C'$, so ist nach dem Multiplikationstheoreme der Determinanten

$$C' = A' B'$$

und somit C' von Null verschieden, wenn A' und B' nicht verschwinden.

Ist in (20) $b_{ik} = a_{ki}$, so haben die linearen Substitutionen (19) und (20) denselben Modul; man nennt eine jede derderselben die transponirte der anderen und ebenso von den Systemen

$$\begin{matrix} a_{11} \ldots . a_{1n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n1} \ldots . a_{nn} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} a_{11} \ldots . a_{n1} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{1n} \ldots . a_{nn} \end{matrix}$$

jedes das transponirte des anderen.

Auf unseren Gegenstand zurückkommend, können wir in Folge der vorstehenden allgemeinen Ausführungen sagen, *dass der Uebergang von homogenen Abscissen zu homogenen DV-Coordinaten in der Geraden vermittelst einer homogenen binären linearen Substitution vollzogen werde.* Der umgekehrte Uebergang ist durch die inverse lineare Substitution gegeben. Beziehen wir die Punkte unserer Geraden auf ein anderes Abscissensystem, in welchem P die Coordinaten $P_1' | P_2'$ besitzt, so hängen nach (8) die Veränderlichen $P_1 | P_2$ und $P_1' | P_2'$, nach (17) die Veränderlichen $p_2 | p_2$ und $P_1 | P_2$ linear zusammen, also

gilt das Gleiche für die $p_1 | p_2$ und $P_1' | P_2'$, d, h. $p_1 | p_2$ bleiben lineare Coordinaten von P.

12. Wir betrachten jetzt specielle lineare Coordinatensysteme.

Verlegt man den *ersten Grundpunkt* A des linearen Coordinatensystems ABE *in den unendlich fernen Punkt* der Geraden, so geht dasselbe nach 7, 2 in ein Abscissensystem über mit dem NP B und dem EP E. Da in diesem Falle $\gamma = 0$ zu setzen ist, so geht (14) in (7) über.

Lässt man den *zweiten Grundpunkt* B des linearen Systems ABE *mit dem unendlich fernen Punkte* zusammenfallen, so wird nach 7, 3 die lineare Coordinate zur reciproken Abscisse in einem Abscissensysteme mit dem NP A und dem EP E.

Nehmen wir schliesslich für den EP E eines linearen Systems ABE den *Mittelpunkt* der Strecke AB (**6**), so geht das DV, welches der Punkt P mit den Punkten ABE bestimmt, in das Theilverhältniss der Strecke BA im Punkte P über (7, 1), die DV-Coordinaten werden zu Theilverhältnisscoordinaten, welche durch die Ausführungen in **1** bereits für eigentliche Punkte vorbereitet wurden.

Wir wenden uns jetzt zur *Berechnung des DV von vier Punkten aus deren linearen Coordinaten.*

Bedeuten $P = \frac{P_1}{P_2}$, $Q = \frac{Q_1}{Q_2}$ die Abscissen von zwei Punkten PQ in einem Systeme OE, $p = \frac{p_1}{p_2}$, $q = \frac{q_1}{q_2}$ die linearen Coordinaten von PQ in einem beliebigen Systeme ABE, dann ist zunächst nach (17) $p_1 = \alpha P_1 + \beta P_2$, $p_2 = \gamma P_1 + \delta P_2$ u. s. w. zu setzen, also

$$(22)\quad \begin{vmatrix} p_1 & p_2 \\ q_1 & q_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha P_1 + \beta P_2 & \gamma P_1 + \delta P_2 \\ \alpha Q_1 + \beta Q_2 & \gamma Q_1 + \delta Q_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P_1 & P_2 \\ Q_1 & Q_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = (PQ)\Delta.$$

Ziehen wir nunmehr vier Punkte $PQRS$ mit den gleichnamigen Abscissen und mit den resp. linearen Coordinaten $pqrs$ in Betracht, so ist nach (12)

$$(PQRS) = \frac{(PR)(QS)}{(PS)(QR)},$$

nach (22) aber

$$(pr) = \Delta(PR), \quad (qs) = \Delta(QS)$$

u. s. w., also schliesslich

$$(PQRS) = \frac{(pr)(qs)}{(ps)(qr)}. \tag{23}$$

Das DV der Punkte $PQRS$ ist *nur* abhängig von den linearen Coordinaten, nicht von den das lineare System bestimmenden Zahlen $\alpha\beta\gamma\delta$. Dagegen treten bei der Berechnung der Strecke, des Theilverhältnisses, der Mitte einer Strecke aus den linearen Coordinaten der betreffenden Punkte die Substitutionscoefficienten im Allgemeinen in die Ausdrücke ein.

Durch Vorstehendes ist zugleich die Aufgabe gelöst, das DV von vier Punkten $PQRS$ zu berechnen, wenn die DVe gegeben sind, welche $PQRS$ einzeln mit drei verschiedenen Punkten ABC bilden. Sind nämlich die DVe

$$(ABCP) = \frac{p_1}{p_2}, \quad (ABCQ) = \frac{q_1}{q_2}$$

u. s. w. gegeben, so ist $\frac{p_1}{p_2}$ lineare Coordinate von P, $\frac{q_1}{q_2}$ von Q u. s. w. im Systeme ABC, also nach (23)

$$(PQRS) = \frac{(pr)(qs)}{(ps)(qr)}.$$

§ 3. Die Punktreihe und das Strahlenbüschel in der Ebene.

13. Bis jetzt haben wir nur die *einzelnen Gerade* in Betracht gezogen; um mehrere Gerade, zunächst einer Ebene, gleichzeitig behandeln zu können, müssen wir ein Coordinatensystem in der Ebene zu Hülfe nehmen. Wir wählen ein *rechtwinkliges Coordinatensystem*, welches bekanntlich folgendermassen in der Ebene eingeführt wird. In einer beliebigen Geraden derselben, welche die Punkte O und X enthält — unter Punkt zunächst wieder einen eigentlichen Punkt verstanden — wird ein Abscissensystem OE_1, in einer durch O gehenden, zu OX senkrechten Geraden OY der Ebene ein Abscissensystem OE_2 eingeführt und dabei $OE_1 = OE_2$ genommen. Trifft eine durch den Punkt P der Ebene gehende zu OY parallele Gerade die Gerade OX in P_x, eine durch P gehende zu OX parallele Gerade die Gerade OY in P_y, und

es besitzt P_x im Systeme OE_1 die Abscisse x, P_y im Systeme OE_2 die Abscisse y, so sind x und y rechtwinklige Coordinaten des Punktes P unserer Ebene.

Man nennt x die **Abscisse**, y die **Ordinate** von P, OX die **Abscissenaxe**, OY die **Ordinatenaxe**, beide zusammen die **Coordinatenaxen**, O den **Coordinatenanfangspunkt**.

Im Folgenden werden wir den Punkt der Coordinaten $x|y$ auch kurz mit $x|y$ bezeichnen, wo natürlich $x|y$ keine homogene Veränderliche bedeuten.

Den Punkt $1|1$ kann man als EP des rechtwinkligen Systems bezeichnen. Die beiden Axen und der EP bestimmen ein rechtwinkliges Coordinatensystem.

14. Es seien $A = x'|y'$ und $B = x''|y''$ zwei feste Punkte der Ebene, $P = x|y$ bedeute einen beweglichen Punkt der Geraden AB. Alsdann gilt die Proportion

$$x - x' : y - y' = x' - x'' : y' - y'', \tag{24}$$

aus welcher die Gleichung

$$x(y' - y'') + y(x'' - x') + x'y'' - x''y' = 0$$

oder

$$\begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{25}$$

folgt.

Die Coordinaten $x|y$ eines jeden Punktes P von AB erfüllen diese Gleichung und umgekehrt liegt P auf AB, wenn die Coordinaten $x|y$ von P diese Gleichung erfüllen. Dieselbe wird deshalb die **Gleichung der Geraden** AB genannt.

Der Ausdruck links in (25) hat die Form

$$u_1 x + u_2 y + u_3;$$

wir schreiben deshalb für (25) die Gleichung

$$u_1 x + u_2 y + u_3 = 0. \tag{26}$$

Die Coefficienten u_1 u_2 u_3 sind reelle, endliche Zahlen, u_1 und u_2 sind nicht gleichzeitig Null. Umgekehrt ist jede in $x|y$ lineare Gleichung $u_1 x + u_2 y + u_3 = 0$, wenn u_1 u_2 u_3 die

eben ausgesprochenen Eigenschaften besitzen, die Gleichung einer bestimmten Geraden unserer Ebene. Denn erfüllt das Werthesystem $x' | y'$ diese Gleichung, so wird

$$u_1(x - x') + u_2(y - y') = 0;$$

vermittelst eines weiteren Systems $x'' | y''$ erhalten wir

$$u_1(x' - x'') + u_2(y' - y'') = 0$$

und aus den beiden letzten Gleichungen die Proportion (24), d. h. der Punkt $x | y$ liegt auf einer bestimmten Geraden.

Die Richtung der durch die Gleichung $u_1 x + u_2 y + u_3 = 0$ gegebenen Geraden oder, wie man kurz sagt, der Geraden $u_1 x + u_2 y + u_3 = 0$, ist durch $\frac{y' - y''}{x' - x''}$ bestimmt und hängt somit *nur* von dem Verhältnisse der Coefficienten von x und y ab.

15. Wir gehen nunmehr, indem wir $x = \frac{x_1}{x_3}$, $y = \frac{x_2}{x_3}$ setzen, zu homogenen Abscissen und Ordinaten über. Da wir vor der Hand nur endliche Coordinaten in Betracht ziehen, so können wir $x_3 = x_3'$ wählen und erhalten so jedem Punkte P unserer Ebene drei Zahlen $x_1 | x_2 | x_3$ zugeordnet, welche endlich und nicht gleichzeitig Null sind und deren Verhältnisse nur in Betracht kommen. Wir können also $x_1 | x_2 | x_3$ homogene (ternäre) rechtwinklige Coordinaten des Punktes P der Ebene nennen. Die dritte homogene Coordinate eines Punktes ist vorläufig von Null verschieden.

Setzen wir in Gleichung (25), um daselbst homogene Coordinaten einzuführen,

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3}, \quad x' = \frac{x_1'}{x_3'}, \quad y' = \frac{x_2'}{x_3'}$$

u. s. w., so erhalten wir sie in der Form

$$(27) \qquad (x x' x'') = 0,$$

wenn allgemein die Determinante

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_1' & x_1'' \\ x_2 & x_2' & x_2'' \\ x_3 & x_3' & x_3'' \end{vmatrix}$$

mit $(x x' x'')$ bezeichnet wird.

Durch die Substitution $x = \frac{x_1}{x_3}$, $y = \frac{x_2}{x_3}$ geht ferner (26) über in

(28) $$u_x = 0,$$

wenn allgemein u_x für $u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3$ geschrieben wird.

Bedeutet ϱ eine endliche von Null verschiedene Zahl, so ist die Gerade $u_x = 0$ mit der Geraden $\varrho u_x = 0$ Null identisch. Mit Rücksicht auf unsere Ausführungen in **14** können wir nach **4** also $u_1 | u_2 | u_3$ homogene (ternäre) Coordinaten einer Geraden unserer Ebene nennen; sie unterliegen vorläufig der Beschränkung, dass ihre Verhältnisse reell sein müssen und die beiden ersten nicht gleichzeitig verschwinden dürfen.

Als homogene Punkt- und Liniencoordinaten können wir zunächst reelle Zahlen gebrauchen, da das Imaginäre noch nicht in Betracht kommt.

Den Punkt der Coordinaten $x_1 | x_2 | x_3$ werden wir auch mit $x_1 | x_2 | x_3$, die Gerade der Coordinaten $u_1 | u_2 | u_3$ mit $u_1 | u_2 | u_3$ bezeichnen.

Enthält die Gerade $U = u_1 | u_2 | u_3$ den Punkt $P = x_1 | x_2 | x_3$, so sagt man auch, die Gerade U liegt am Punkte P, der Punkt P liegt an der Geraden U, oder die beiden Elemente — Punkt und Gerade — liegen aneinander*) (sie sind incident).

Nach Obigem können wir sagen:

Der Punkt $x_1 | x_2 | x_3$ *und die Gerade* $u_1 | u_2 | u_3$ *liegen dann und nur dann aneinander, wenn* $u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$ *ist.*

Die bewegliche Gerade $u_1 | u_2 | u_3$ geht durch den festen Punkt $x_1 | x_2 | x_3$, wenn $u_x = 0$ ist und umgekehrt. Man nennt deshalb $u_x = 0$ die Gleichung des Punktes $x_1 | x_2 | x_3$ in Liniencoordinaten $u_1 | u_2 | u_3$ und spricht gelegentlich kurz vom Punkte $u_x = 0$.

Besitzt ein Punkt unserer Ebene in einem rechtwinkligen Systeme R_1 die homogenen Coordinaten $x_1 | x_2 | x_3$, in einem anderen rechtwinkligen Systeme R_2 die homogenen Coordinaten $x_1' | x_2' | x_3'$, so ist, wie in **31** gezeigt wird,

*) Pasch, Vorlesungen über neuere Geometrie, Leipzig 1882, S. 73.

$$
\begin{aligned}
x_1 &= a_{11}x_1' + a_{21}x_2' + a_{31}x_3', \\
x_2 &= a_{12}x_1' + a_{22}x_2' + a_{32}x_3', \qquad (29) \\
x_3 &= \qquad\qquad\qquad\quad a_{33}x_3',
\end{aligned}
$$

wo die Determinante

$$
\triangle = \begin{vmatrix} a_{11}. & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix}
$$

nicht verschwindet. Die Coefficienten a_{ik} hängen nur von der Lage der Bestimmungselemente des einen Systems gegen die des anderen ab.

Besitzt die Gerade U die homogenen Coordinaten $u_1 | u_2 | u_3$ im Systeme R_1, $u_1' | u_2' | u_3'$ im Systeme R_2, so ist

$$
\begin{aligned}
u_1' &= a_{11}u_1 + a_{12}u_2 \\
u_2' &= a_{21}u_1 + a_{22}u_2 \qquad (30) \\
u_3' &= a_{31}u_1 + a_{32}u_2 + a_{33}u_3,
\end{aligned}
$$

da die Gleichung $u_x = 0$ durch die lineare Substitution (29) in die Gleichung $u'_{x'} = 0$ übergehen muss.

16. Die Gerade, welche die Punkte $a_1 | a_2 | a_3$ und $b_1 | b_2 | b_3$ verbindet, hat nach **15** die Gleichung $(abx) = 0$, mithin die homogenen Coordinaten

$$
a_2 b_3 - a_3 b_2 \,|\, a_3 b_1 - a_1 b_3 \,|\, a_1 b_2 - a_2 b_1 .
$$

Diese drei Zahlen sind die Adjunkten der Elemente der ersten Zeile des Systems

$$
\begin{matrix} * & * & * \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{matrix}
$$

und sollen allgemein mit $(ab)_1$, $(ab)_2$, $(ab)_3$ bezeichnet werden.

Den Schnittpunkt $x_1 | x_2 | x_3$ zweier Geraden $u_1 | u_2 | u_3$ und $v_1 | v_2 | v_3$ finden wir aus den Gleichungen $u_x = 0$, $v_x = 0$ als

$$
(uv)_1 \,|\, (uv)_2 \,|\, (uv)_3 .
$$

Wird $(uv)_3 = 0$, so können wir von einem Schnittpunkt der beiden Geraden zunächst nicht sprechen (**15**); sie sind in diesem Falle parallel (**14**).

Soll die Gerade $w_1 | w_2 | w_3$ durch den Schnittpunkt der Geraden $u_1 | u_2 | u_3$ und $v_1 | v_2 | v_3$ gehen, so muss (**15**)

$$w_1(uv)_1 + w_2(uv)_2 + w_3(uv)_3 = (uvw) = 0$$

sein.

Wird umgekehrt für drei verschiedene Grade $u_1 | u_2 | u_3$, $v_1 | v_2 | v_3$, $w_1 | w_2 | w_3$ die Determinante

$$(uvw) = 0,$$

so gehen sie entweder durch einen Punkt oder sie sind paarweise parallel.

17. Bewegt sich der Punkt $P = x_1 | x_2 | x_3$ auf der Geraden, welche die Punkte $A = a_1 | a_2 | a_3$ und $B = b_1 | b_2 | b_3$ verbindet, so können drei Zahlen ϱ, λ_1, λ_2 so bestimmt werden, dass

$$(31) \qquad \begin{aligned} \varrho x_1 &= \lambda_1 a_1 + \lambda_2 b_1, \\ \varrho x_2 &= \lambda_1 a_2 + \lambda_2 b_2, \\ \varrho x_3 &= \lambda_1 a_3 + \lambda_2 b_3 \end{aligned}$$

wird. Denn bedeutet $C = c_1 | c_2 | c_3$ einen der Geraden AB nicht angehörigen Punkt der Ebene, so folgt aus der bekannten Identität

$$u_x(abc) = u_a(bcx) + u_b(cax) + u_c(abx),$$

da $(abx) = 0$ ist (**14**),

$$(32) \qquad (abc)x_i = (bcx)a_i + (cax)b_i \quad (i = 1, 2, 3).$$

Dabei ist $\varrho = (abc)$ nicht Null, $\lambda_1 = (bcx)$ und $\lambda_2 = (cax)$ sind endliche Zahlen, welche für keine Lage von P auf AB gleichzeitig verschwinden. Bei gegebenem P ist das Verhältniss von λ_1 und λ_2 bestimmt. Also sind $\lambda_1 | \lambda_2$ *homogene binäre Veränderliche* (**4**).

Jedem Werthesysteme der homogenen Veränderlichen $\lambda_1 | \lambda_2$ entspricht umgekehrt vermöge (31) ein bestimmter Punkt P auf AB, wenn nur $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ reell und nicht gleich $-\frac{b_3}{a_3}$ ist; denn für diesen Werth von $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ wird $x_3 = 0$ (**15**).

Man nennt $\lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ einen Parameter, die Darstellung der Coordinaten der Punkte einer Geraden in der Form (31) eine Parameterdarstellung in der Geraden.

In Folge der Gleichungen (31) und (32) hängen die Zahlen $x_1 | x_2 | x_3$ linear ab von den Zahlen $\lambda_1 | \lambda_2$ und um-

gekehrt. Wir bezeichnen daher $\lambda_1 | \lambda_2$ auch als *homogene lineare Coordinaten des Punktes P der Geraden.*

Bedeutet ferner P die Abscisse von P im Systeme AB, so ist

$$P = \frac{AP}{AB} = \frac{a_3 x_1 - a_1 x_3}{a_3 b_1 - a_1 b_3} \cdot \frac{b_3}{a_3} = \frac{a_3 x_2 - a_2 x_3}{a_3 b_2 - a_2 b_3} \cdot \frac{b_3}{a_3};$$

führen wir hier vermittelst (31) den Parameter $\lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ ein, so wird

$$P = \frac{b_3 \lambda_2}{a_3 \lambda_1 + b_3 \lambda_2}. \tag{33}$$

Die Determinante $\begin{vmatrix} 0 & b_3 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$ ist nicht Null. Man erkennt, dass $\lambda_1 | \lambda_2$ homogene lineare Coordinaten von P von der in § 2 entwickelten Art sind.

Vier Punkte $PQRS$ unserer Geraden mit den Parametern $\varkappa = \frac{\varkappa_1}{\varkappa_2}$, $\lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$, $\mu = \frac{\mu_1}{\mu_2}$, $\nu = \frac{\nu_1}{\nu_2}$ haben also nach (23) das DV

$$(PQRS) = \frac{(\varkappa\mu)(\lambda\nu)}{(\varkappa\nu)(\lambda\mu)}. \tag{34}$$

18. Es soll jetzt das DV der vier Punkte $PQRS$ berechnet werden, in welchen vier Gerade

$$\alpha_x = 0, \quad \beta_x = 0, \quad \gamma_x = 0, \quad \delta_x = 0$$

unserer Ebene von einer Geraden $U = u_1 | u_2 | u_3$ geschnitten werden.

Wir führen auf U eine Parameterdarstellung ein (**17**). Componiren wir das Gleichungssystem (31) mit $\alpha_1 | \alpha_2 | \alpha_3$, so erhalten wir

$$\varrho \alpha_x = \lambda_1 \alpha_a + \lambda_2 \alpha_b$$

und somit als Parameter des Schnittpunktes P von U und $\alpha_x = 0$ aus $\lambda_1 \alpha_a + \lambda_2 \alpha_b = 0$

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = -\frac{\alpha_b}{\alpha_a}$$

u. s. w. Nach (34) wird zunächst

$$(PRRS) = \frac{(\alpha_a \gamma_b - \alpha_b \gamma_a)(\beta_a \delta_b - \beta_b \delta_a)}{(\alpha_a \delta_b - \alpha_b \delta_a)(\beta_a \gamma_b - \beta_b \gamma_a)}.$$

Der Ausdruck rechts ist unabhängig von den Zahlen a_i und b_i. Denn es ist z. B.

$$\begin{vmatrix} \alpha_a & \gamma_a \\ \alpha_b & \gamma_b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$
$$= (\alpha\gamma)_1(ab)_1 + (\alpha\gamma)_2(ab)_2 + (\alpha\gamma)_3(ab)_3,$$

nach **16** aber

$$u_1 = (ab)_1, \quad u_2 = (ab)_2, \quad u_3 = (ab)_3,$$

also

$$\alpha_a\gamma_b - \alpha_b\gamma_a = (\alpha\gamma u)$$

u. s. w., somit schliesslich

$$(PQRS) = \frac{(\alpha\gamma u)(\beta\delta u)}{(\alpha\delta u)(\beta\gamma u)}. \tag{35}$$

19. Die Gesammtheit der durch einen Punkt S gehenden Geraden unserer Ebene heisst ein Strahlenbüschel, S heisst der Scheitel, Mittelpunkt oder Träger des Strahlenbüschels.

Gehören die Geraden $U = u_1 \mid u_2 \mid u_3$, $V = v_1 \mid v_2 \mid v_3$, $W = w_1 \mid w_2 \mid w_3$ einem Büschel an, so besteht nach **16** die Gleichung $(uvw) = 0$. Betrachten wir nun im Büschel die Geraden V und W als fest, die Gerade U als beweglich, so lassen sich die Coordinaten von U immer auf die Form

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 w_1 \mid \lambda_1 v_2 + \lambda_2 w_2 \mid \lambda_1 v_3 + \lambda_2 w_3 \tag{36}$$

bringen; vergl. die Rechnung in **17**.

Diese Darstellung der Coordinaten eines Strahles im Büschel heisst eine Parameterdarstellung im Strahlenbüschel. Der Parameter $\lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ ist Coordinate von U in einem unten näher zu beschreibenden Systeme; $\lambda_1 \mid \lambda_2$ sind homogene binäre Coordinaten von U, die keiner Beschränkung unterliegen ausser derjenigen, dass $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ reell sein muss.

Zu den Werthen ∞, 0, 1 von λ gehören der Reihe nach die Strahlen $V\,W\,E$, wenn wir den Strahl $v_1 + w_1 \mid v_2 + w_2 \mid v_3 + w_3$ mit E bezeichnen.

Wir wollen jetzt das DV berechnen, nach welchem vier Strahlen $KLMN$ unseres Büschels mit den resp. Parametern

$$\varkappa = \frac{\varkappa_1}{\varkappa_2},\ \lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2},\ \mu = \frac{\mu_1}{\mu_2},\ \nu = \frac{\nu_1}{\nu_2}$$

von einer Geraden $T = t_1 \mid t_2 \mid t_3$ geschnitten werden. Hierzu brauchen wir Gleichung (35); nun wird aber z. B.

$$\begin{vmatrix} \varkappa_1 v_1 + \varkappa_2 w_1 & \mu_1 v_1 + \mu_2 w_1 & t_1 \\ \varkappa_1 v_2 + \varkappa_2 w_2 & \mu_1 v_2 + \mu_2 w_2 & t_2 \\ \varkappa_1 v_3 + \varkappa_2 w_3 & \mu_1 v_3 + \mu_2 w_3 & t_3 \end{vmatrix}$$
$$= (\varkappa_1 \mu_2 - \varkappa_2 \mu_1)(vwt) = (\varkappa\mu)(vwt)$$

u. s. w., also das gesuchte DV gleich

$$\frac{(\varkappa\mu)(\lambda\nu)}{(\varkappa\nu)(\lambda\mu)}.$$

Dasselbe ist unabhängig von $t_1 \mid t_2 \mid t_3$, also gilt der *Satz:*

Vier Strahlen eines Strahlenbüschels werden von jeder Geraden seiner Ebene, welche nicht durch den Scheitel desselben geht und zu keinem der vier Strahlen parallel ist, nach demselben DV geschnitten.

Dieses DV nennt man das DV der vier Strahlen.

Das DV der Strahlen $KLMN$ wird mit $(KLMN)$ bezeichnet, man überträgt überhaupt die in 2 und 8 eingeführten Begriffe auf das Strahlenbüschel, nennt also bei $(KLMN) = -1$ die vier Strahlen *harmonisch* u. s. w. Die Strahlen KL werden durch die Strahlen LM getrennt oder nicht getrennt, je nachdem $(KLMN)$ negativ oder positiv ist. Man spricht von harmonischer Trennung u. s. w.

Werden die Strahlen $\alpha\beta\gamma\delta$ eines Büschels mit dem Scheitel s von einer Geraden bez. in den Punkten $abcd$ geschnitten, so ist ($\triangle$ = Dreieck)

$$\frac{\triangle\, acs}{\triangle\, cbs} = \frac{ac}{cb},$$

ferner unter Berücksichtigung des jedem Winkel beizulegenden Vorzeichens:

$$\triangle acs : \triangle cbs = cs\,.\,sa\,.\,\sin\alpha\gamma : bs\,.\,sc\,.\,\sin\gamma\beta$$
$$= sa\,.\,\sin\alpha\gamma : sb\,.\,\sin\gamma\beta,$$

wo der $\sphericalangle asc$ mit $\alpha\gamma$ u. s. w. bezeichnet wurde. Also hat man

$$\frac{ac}{cb} = \frac{sa\,.\,\sin\alpha\gamma}{sb\,.\,\sin\gamma\beta},$$

analog

$$\frac{ad}{db} = \frac{sa \,.\, \sin \alpha\delta}{sb \,.\, \sin \delta\beta}$$

und somit, da $(abcd) = (\alpha\beta\gamma\delta)$,

$$(\alpha\beta\gamma\delta) = \frac{\sin \alpha\gamma}{\sin \gamma\beta} : \frac{\sin \alpha\delta}{\sin \delta\beta}.$$

Das DV von vier Strahlen ist also das Verhältniss zweier Sinusverhältnisse. Zugleich ist der letzte Satz auf's Neue bewiesen.

Man nennt $\frac{\sin \alpha\gamma}{\sin \gamma\beta}$ das Theilverhältniss des Winkels $\alpha\beta$ im Strahle γ. Darnach erscheint das DV von vier Strahlen als Verhältniss zweier Theilverhältnisse. Fällt man von irgend einem Punkte des Strahles γ Lothe auf α bez. β von der Länge p_1 bez. p_2, so ist $\frac{\sin \alpha\gamma}{\sin \gamma\beta} = \frac{p_1}{p_2}$.

Nunmehr können wir auch dem Parameter λ bei obiger Darstellung (36) eine geometrische Bedeutung zumessen. Aus der soeben abgeleiteten Gleichung

$$(KLMN) = \frac{(\varkappa\mu)(\lambda\nu)}{(\varkappa\nu)(\lambda\mu)} \tag{37}$$

folgt nämlich

$$(VWEU) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \lambda.$$

Der Parameter λ in (36) *bedeutet also ein DV,* welches der zugehörige Strahl U mit drei festen Strahlen VWE bildet, deren Parameter bez. die Zahlen ∞, 0, 1 sind.

Wir können demnach λ DV-Coordinate des Strahles U nennen in einem gewissen Systeme; V heisst der erste Grundstrahl oder der Unendlichkeitsstrahl (US), W der zweite Grundstrahl oder der Nullstrahl (NS) und E der Einheitsstrahl (ES) des Coordinatensystems oder der Parameterdarstellung.

Nach **17** sind $\lambda_1 \mid \lambda_2$ linear abhängig von den Coordinaten $u_1 \mid u_2 \mid u_3$ und umgekehrt nach (36) die u_i von $\lambda_1 \mid \lambda_2$. Auf Grund dessen können wir $\lambda_1 \mid \lambda_2$ auch homogene (binäre) lineare Coordinaten des Strahles U im Büschel nennen.

20. Wir benutzen jetzt die Gleichung (37) zur Lösung der folgenden *Aufgabe:*

Gegeben sind in der Ebene vier Punkte *abcd*, es soll das DV der vier Strahlen *KLMN* berechnet wereen, welche von einem Punkte $P = x_1 | x_2 | x_3$ der Ebene nach jenen vier Punkten gehen.

Wir führen im Strahlenbüschel *P* eine Parameterdarstellung ein (**19**), berechnen die Parameter von *KLMN*, wenden (37) an und beseitigen dann die Coordinaten der Grundstrahlen (vergl. die Rechnung in **18**). Wir erhalten so

$$(KLMN) = \frac{(acx)(bdx)}{(adx)(bcx)}, \tag{38}$$

wenn $a_1 | a_2 | a_3$ die Coordinate von *a* u. s. w.

Liegen *abcd* an einer Geraden, so wird (*KLMN*) von den Zahlen $x_1 | x_2 | x_3$ unabhängig, wie dies auch unmittelbar aus der Definition des DV von vier Strahlen folgt. Also:

Nach vier Punkten einer Geraden gehen aus jedem ihr nicht angehörigen Punkte der Ebene vier Strahlen von demselben DV.

21. Bis jetzt können wir von einem Punkte $x_1 | x_2 | x_3$ und von einer Geraden $u_1 | u_2 | u_3$ nur unter ganz bestimmten Voraussetzungen über die Zahlen x_i und u_i reden (**15**). Um jetzt beliebige homogene ternäre Werthesysteme heranziehen zu können, werden wir die Begriffe „Punkt" und „Gerade" einer Ebene durch folgende Definitionen erweitern:

I. Jedes System reeller, imaginärer oder complexer Werthe der homogenen Veränderlichen $x_1 | x_2 | x_3$ soll fortan ein in dem zu Grunde gelegten Coordinatensysteme mit den homogenen Coordinaten $x_1 | x_2 | x_3$ behafteter Punkt unserer Ebene genannt werden.

II. Jedes System reeller, imaginärer oder complexer Werthe der homogenen Veränderlichen $u_1 | u_2 | u_3$ soll fortan eine in dem zu Grunde gelegten Coordinatensysteme mit den homogenen Coordinaten $u_1 | u_2 | u_3$ behaftete Gerade unserer Ebene genannt werden.

Die beiden Definitionen gehen dadurch in einander über, dass man die Worte „Punkt" und „Gerade" vertauscht. Definitionen, ebenso Lehrsätze dieser Art, pflegt man in vorstehender Weise einander gegenüberzustellen.

Wir setzen fest, dass die neu dazugekommenen Coordinaten mittelst derselben Formeln (29) und (30) transformirt werden, wie die früheren. Wir nennen wieder $\frac{x_1}{x_3}$ die Abscisse, $\frac{x_2}{x_3}$ die Ordinate des Punktes $x_1 | x_2 | x_3$, den wir auch allgemein mit x bezeichnen werden; ebenso wird für die Gerade $u_1 | u_2 | u_3$ auch allgemein kurz u geschrieben werden.

Die Erweiterung der Begriffe „Punkt" und „Gerade" nöthigt uns, auch den Begriff der Incidenz dieser Elemente (**15**) weiter zu fassen.

Wir sagen:

III. Der Punkt $x_1 | x_2 | x_3$ und die Gerade $u_1 | u_2 | u_3$ liegen dann und nur dann aneinander, wenn $u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$ ist.

Nach **15** ist der Ausdruck u_x unabhängig vom rechtwinkligen Coordinatensysteme.

Wir treffen ferner folgende Bestimmungen:

Sind die Verhältnisse der homogenen Coordinaten eines Punktes sämmtlich reell, so heisst derselbe ein reeller Punkt; sind die Verhältnisse seiner homogenen Coordinaten nicht sämmtlich reell, so heisst der Punkt ein imaginärer Punkt.

Die imaginären Punkte a und b heissen conjugirt imaginär, wenn a_i und b_i conjugirt imaginäre Zahlen sind bez. sich in solche verwandeln lassen.

Analoge Bestimmungen sollen für die Gerade gelten.

Ist die dritte Coordinate eines Punktes Null, so heisst derselbe ein unendlich ferner Punkt der Ebene. Die reellen unendlich fernen Punkte heissen uneigentliche, die übrigen reellen Punkte eigentliche Punkte der Ebene.

Die dritte Coordinate eines unendlich fernen Punktes ist in jedem rechtwinkligen Coordinatensysteme Null nach (29).

Die Gerade $0 | 0 | 1$, welche nach (30) in jedem rechtwinkligen Systeme dieselben Coordinaten besitzt, enthält die unendlich fernen Punkte der Ebene und nur solche Punkte (III). Sie heisst die unendlich ferne Gerade der Ebene und wird eine uneigentliche Gerade genannt, während die übrigen reellen Geraden eigentliche sind.

22. Aus den Definitionen I—III folgen die Sätze:

1. *Es giebt eine und nur eine Gerade, welche an zwei Punkten a und b der Ebene liegt; ihre Coordinaten sind* $(ab)_1 \mid (ab)_2 \mid (ab)_3$.

2. *Es giebt ein und nur ein Punkt, welcher an zwei Geraden α und β der Ebene liegt; seine Coordinaten sind* $(\alpha\beta)_1 \mid (\alpha\beta)_2 \mid (\alpha\beta)_3$.

Vergl. Artikel **16**. Die gemeinsame Gerade zweier Punkte soll wieder die Verbindungslinie derselben, der gemeinsame Punkt zweier Geraden ihr Schnittpunkt heissen. Parallele eigentliche Gerade schneiden sich in einem unendlich fernen Punkte (**16**). Man kann den Begriff des Parallelismus dadurch erweitern, dass man zwei Gerade — im Sinne der Definition II — parallel nennt, wenn ihr Schnittpunkt ein unendlich ferner Punkt ist.

3. *Drei Punkte* $a\,b\,c$ *liegen dann und nur dann an einer und derselben Geraden, wenn* $(a\,b\,c) = 0$ *ist.*

4. *Drei Gerade* $\alpha\,\beta\,\gamma$ *gehen dann und nur dann durch einen und denselben Punkt, wenn* $(\alpha\beta\gamma) = 0$ *ist.*

Vergl. Artikel **15** und **16**; die vorgenommenen Begriffserweiterungen vereinfachen die dort angestellten Betrachtungen, indem sie eine einheitliche Ausdrucksweise möglich machen.

Aus den Sätzen 3 und 4 folgt dann, wie in **17** und **19**, *dass die Punkte an einer Geraden und die Geraden an einem Punkte sich durch einen Parameter in der Form* (31) *bez.* (33) *darstellen lassen.* Der Parameter ist als *lineare Coordinate* des zugeordneten Punktes bez. der zugeordneten Geraden zu bezeichnen.

Führen wir in einer Geraden u die Parameterdarstellung (31) ein, so wird x_3' nur Null für $\lambda = -\frac{b_3}{a_3}$, wenn u nicht die unendlich ferne Gerade ist. An jeder von der letzteren verschiedenen Geraden liegt also *ein* unendlich ferner Punkt, ihr Schnittpunkt mit der unendlich fernen Geraden. Nun wurde in § 1 bereits in jeder eigentlichen Geraden ein unendlich ferner Punkt eingeführt, indessen wird später gezeigt werden, dass eine Reihe von den in der Geraden vollzogenen Begriffserweiterungen, Benennungen u. s. w. aus denjenigen dieses Paragraphen hervorgehen (**25**).

Für $\lambda = -\frac{b_3}{a_3}$ wird in (31) $\varrho x_1 = b_3 a_1 - b_1 a_3$, $\varrho x_2 = b_3 a_2 - b_2 a_3$, $\varrho x_3 = 0$. Nach Satz 1 oben können wir aber $u_1 = (ab)_1$, $u_2 = (ab)_2$, $u_3 = (ab)_3$ setzen. Der unendlich ferne Punkt der Geraden u hat mithin die Coordinaten $-u_2 \,|\, u_1 \,|\, 0$. Dies folgt auch aus den Gleichungen $u_x = 0$ und $x_3 = 0$. Jede zu u parallele Gerade geht durch den Punkt $-u_2 \,|\, u_1 \,|\, 0$.

Jeder unendlich ferne Punkt $a_1 \,|\, a_2 \,|\, 0$ ist solcher gewisser Geraden, nämlich aller Geraden $-a_2 \,|\, a_1 \,|\, a_3$ (III), wo a_3 eine endliche, sonst beliebige Zahl bedeutet.

23. Die Gesammtheit der an einer Geraden liegenden Punkte heisst eine gerade Punktreihe, jene Gerade ihr Träger. In den beiden ersten Paragraphen haben wir die (eigentliche) Gerade nur in so fern in Betracht gezogen, als sie Träger einer geraden Punktreihe ist. Später trat dann die Gerade dem Punkte als selbständiges Raumelement gegenüber, neben der geraden Punktreihe musste die Gesammtheit der an einem Punkte liegenden Geraden (Strahlen), das Strahlenbüschel, in Betracht gezogen werden. Die Begriffe „Punktreihe“ und „Strahlenbüschel“ dehnen wir auch auf beliebige Elemente der Ebene im Sinne der Definitionen I und II aus.

Durch die Gleichung $u_x = 0$ ist uns eine Punktreihe mit dem Träger u oder ein Strahlenbüschel mit dem Scheitel x gegeben, je nachdem wir in ihr die Zahlen x_i oder u_i als Veränderliche ansehen.

In Folge der Einführung neuer Elemente in der Ebene sind nunmehr die Begriffe „Strecke“, „Winkel“ u. a. zu erweitern. In welcher Weise man dabei vorzugehen hat, ersieht man aus den analogen Ausführungen in § 1. Um insbesondere das DV von vier Elementen — im erweiterten Sinne — zu definiren, benutzen wir die Gleichungen (35) und (38). Wir sagen:

IV. Unter dem DV von vier Punkten $abcd$ einer Geraden u, in welchen dieselbe von vier Geraden

V. Unter dem DV von vier Strahlen $\alpha\beta\gamma\delta$ eines Büschels mit dem Scheitel x, welche nach vier

$\alpha\beta\gamma\delta$ geschnitten wird, verstehen wir den Ausdruck

$$\frac{(\alpha\gamma u)(\beta\delta u)}{(\alpha\delta u)(\beta\gamma u)}.$$

Wir bezeichnen dasselbe mit $(abcd)$ oder $u(\alpha\beta\gamma\delta)$.

Punkten $abcd$ gehen, verstehen wir den Ausdruck

$$\frac{(acx)(bdx)}{(adx)(bcx)}.$$

Wir bezeichnen dasselbe mit $(\alpha\beta\gamma\delta)$ oder $x(abcd)$.

Beide Ausdrücke sind unabhängig vom rechtwinkligen Coordinatensysteme. Denn besitzt α in einem anderen Systeme die Coordinaten $\alpha_1'|\alpha_2'|\alpha_3'$ u. s. w., so ist nach (30)

$$(\alpha'\gamma'u') = \triangle(\alpha\gamma u), \quad (\beta'\delta'u') = \triangle(\beta\delta u)$$

u. s. w., also

$$\frac{(\alpha'\gamma'u')(\beta'\delta'u')}{(\alpha'\delta'u')(\beta'\gamma'u')} = \frac{(\alpha\gamma u)(\beta\delta u)}{(\alpha\delta u)(\beta\gamma u)}.$$

Analog zeigt man mit Hülfe der Formeln (29), dass der Ausdruck rechts vom Coordinatensysteme unabhängig ist.

Vier Punkte oder Strahlen $abcd$ heissen harmonisch, wenn $(abcd) = -1$ ist u. s. w., wie bei eigentlichen Elementen.

24. Wir nehmen jetzt an, dass die Strahlen $\alpha\beta\gamma\delta$ eines Büchels x der Reihe nach durch die Punkte $abcd$ gehen. Alsdann können wir $\alpha_i = (ax)_i$, $\beta_i = (bx)_i$ u. s. w. setzen (Satz 1 in 22) und es wird z. B.

$$(\alpha\gamma u) = (ax)_1(\gamma u)_1 + (ax)_2(\gamma u)_2 + (ax)_3(\gamma u)_3$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \gamma_a & \gamma_x \\ u_a & u_x \end{vmatrix},$$

mithin, da $\gamma_x = 0$ (III) und $\gamma_a = (acx)$ ist,

$$(\alpha\gamma u) = (acx)u_x,$$

analog

$$(\beta\delta u) = (bdx)u_x,$$

schliesslich, wenn u_x nicht Null ist,

$$\frac{(\alpha\gamma u)(\beta\delta u)}{(\alpha\delta u)(\beta\gamma u)} = \frac{(acx)(bdx)}{(adx)(bcx)}.$$

Hiermit haben wir wegen IV und V den Satz links genommen.

5. *Vier Strahlen eines Büschels werden von jeder Geraden der*

6. *Nach vier Punkten einer geraden Punktreihe gehen aus*

Ebene, welche nicht durch den Scheitel desselben geht, nach demselben DV geschnitten; dieses DV ist gleich dem der vier Strahlen.

jedem ihr nicht angehörigen Punkte der Ebene vier Strahlen von demselben DV; dieses DV ist gleich dem der vier Punkte.

Der Satz rechts bedarf keines besonderen Beweises. Vertauscht man nämlich in den Definitionen I—V die Worte „Punkt“ und „Gerade“ und setzt entsprechend „Punktreihe“ für „Strahlenbüschel“ u. s. w., so gehen die Definitionen I und II, IV und V in einander über, III in sich selbst über. *Man erhält also aus jedem Lehrsatze, bei dessen Beweise nur obige Definitionen benutzt wurden, durch jene Vertauschungen einen (im Allgemeinen) neuen, ebenfalls richtigen Satz.*

Die Sätze 5 und 6 wurden in **19** und **20** für eigentliche Elemente bewiesen. Der Satz in **18** nimmt jetzt eine einfachere Gestalt an.

Führen wir in einer Geraden u eine Parameterdarstellung (31) ein und bezeichnen die Parameter von vier Punkten $pqrs$ von u mit $\varkappa\lambda\mu\nu$, so ist für einen nicht an u liegenden Punkt x

$$(pqrs) = x(pqrs)$$

nach Satz 6, ferner für $\varkappa = \frac{\varkappa_1}{\varkappa_2}$, $\lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ u. s. w.

$$(prx) = (\varkappa\mu)(abx), \quad (qsx) = (\lambda\nu)(abx)$$

u. s. w., also nach V

$$x(pqrs) = \frac{(\varkappa\mu)(\lambda\nu)}{(\varkappa\nu)(\lambda\mu)}$$

und schliesslich

$$(pqrs) = \frac{(\varkappa\mu)(\lambda\nu)}{(\varkappa\nu)(\lambda\mu)}, \tag{39}$$

wie bei eigentlichen Elementen in **17**. Vergl. auch Gleichung (23) und den folgenden Artikel.

Zu den Parametern ∞, 0, 1 gehören die Punkte $a\,b\,e$, wenn $e_i = a_i + b_i$ gesetzt wird.

Nach (39) bestimmt der Punkt p mit dem Parameter $\lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ mit $a\,b\,e$ das DV λ. *Wir können also λ als DV-Coordinate des Punktes p bezeichnen* in einem Systeme mit den

Grundpunkten a und b und dem EP e. (**10**). Drei beliebig in einer Geraden angenommene Punkte abe bestimmen in ihr ein System von DV-Coordinaten, in welchem a und b die Grundpunkte, e den EP vorstellen. Denn wir haben

$$\varrho x_i = \sigma a_i \lambda_1 + \tau b_i \lambda_2 \quad (i = 1, 2, 3)$$

zu setzen, wo $\sigma \mid \tau$ nach **17** so zu bestimmen sind, dass

$$\varrho e_i = \sigma a_i + \tau b_i$$

wird.

Die Formel (39) gilt nach einer oben gemachten Bemerkung auch für das DV von vier Strahlen eines Büschels, in welchem eine Parameterdarstellung eingeführt wurde. Der Parameter im Büschel bedeutet mithin ebenfalls ein DV, kann also DV-Coordinate des zugehörigen Strahles genannt werden. Die am Schlusse von **19** bei eigentlichen Elementen eingeführten Bezeichnungen werden natürlich beibehalten.

Wir können also jetzt in einer beliebigen Geraden und in einem beliebigen Büschel unserer Ebene lineare oder DV-Coordinaten einführen. Dabei dürfen wir zu Grundelementen und zum Einheitselemente drei beliebige Elemente der Geraden bez. des Büschels wählen. Wir können dann, wenn $\lambda_1 \mid \lambda_2$ ein beliebiges Werthesystem von homogenen binären Veränderlichen bedeutet, von einem mit den homogenen Coordinaten $\lambda_1 \mid \lambda_2$ behafteten Elemente der Geraden bez. des Büschels reden. *Somit sind alle früher gemachten Beschränkungen aufgehoben.* Vergl. **17** und **19**.

25. Sind die Grundpunkte ab der Parameterdarstellung (31) eigentliche Punkte, besitzt der beliebige Punkt $x_1 \mid x_2 \mid x_3$ der Geraden ab den Parameter λ, so soll $P = \frac{b_3 \lambda_2}{a_3 \lambda_1 + b_3 \lambda_2}$ wieder die Abscisse des Punktes $x_1 \mid x_2 \mid x_3$ im Systeme ab heissen.

Die eben abgegebene Erklärung stellt den Zusammenhang zwischen den Betrachtungen dieses Paragraphen und der vorhergehenden, auf welchen wiederholt hingewiesen wurde, wirklich her.

Denn führen wir in einer eigentlichen Geraden unserer Ebene eine Parameterdarstellung (31) mit eigentlichen Grundpunkten und reellem EP ein, so wird für einen reellen Punkt

unserer Geraden der Parameter λ reell, also auch die Abscisse im Systeme ab nach (33), für einen imaginären Punkt unserer Geraden aber wird λ und damit auch die Abscisse in ab nicht reell; es liegt ferner an der Geraden ab ein unendlich ferner Punkt, welcher im Systeme ab die Abscisse Unendlich besitzt (22). Nach den Bestimmungen dieses Paragraphen haben wir also in der eigentlichen Geraden Punkte mit reeller und solche mit nicht reeller Abscisse zu betrachten und die ersteren als reelle, die letzteren als imaginäre Punkte zu bezeichnen, den Punkt mit der Abscisse Unendlich haben wir den unendlich fernen Punkt der Geraden zu nennen.

Aus der Gleichung (39) folgt wegen (33) die Gleichung (12), welche uns zur Definition des DV von vier Punkten diente.

So lassen sich, wenn wir von Strecke und Theilverhältniss absehen, die Definitionen und Bestimmungen in § 1 aus solchen dieses Paragraphen ableiten. Wir haben also früher vorgegriffen, was indessen nicht zu vermeiden war, wenn wir mit den einfacheren Betrachtungen in der Geraden beginnen wollten.

26. Eine Gruppe von beliebig vielen Punkten und Geraden der Ebene nennt man eine ebene Figur (Planfigur).

Eine aus n Punkten oder Geraden bestehende Planfigur heisst ein ebenes n-Eck bez. n-Seit.

Unter einem vollständigen ebenen n-Ecke (n-Seite) versteht man eine Gruppe von n Punkten (Geraden) der Ebene mit ihren sämmtlichen $\binom{n}{2}$ Verbindungslinien oder Seiten (Schnittpunkten oder Ecken).

Wir wollen zwei wichtige Sätze über Planfiguren entwickeln.

In einem vollständigen Vierecke $abcd$ bezeichnet man die Schnittpunkte efg der Gegenseiten ab und cd, ac und bd, ad und bc als Nebenecken. Der Punkt

$$\lambda_1 u_a + \lambda_2 u_b = 0$$

liegt an der Geraden ab (17) und fällt mit e zusammen, wenn seine Gleichung durch die Coordinaten $u_i = (cd)_i$ von cd befriedigt wird, also wenn

$$\lambda_1(acd) + \lambda_2(bcd) = 0$$

ist. Die Gleichung von e lautet mithin

$$(bcd)u_a - (acd)u_b = 0.$$

Dieses geht auch unmittelbar aus der Identität

$$u_a(bcd) - u_b(acd) + u_c(abd) - u_d(abc) = 0$$

hervor, wofür wir

$$A + B + C + D = 0$$

schreiben, so dass $A = u_a\,(bcd)$ u. s. w. Der Punkt $A + B = 0$ ist nicht verschieden vom Punkte $C + D = 0$, er liegt mithin sowohl an der Geraden ab als an der Geraden cd, d. h. es ist der Punkt e. Also hat

e die Gleichung $A + B = 0$ oder $C + D = 0$,
f „ „ $A + C = 0$ „ $B + D = 0$,
g „ „ $A + D = 0$ „ $B + C = 0$.

Der Punkt $A - B = 0$ oder $A + C - (B + C) = 0$ ist der Schnittpunkt der Geraden ab und fg. Nun liegen nach (39) die Punkte

$$A = 0, \quad B = 0, \quad A + B = 0, \quad A - B = 0$$

harmonisch. Es gilt somit der Satz: *Je zwei Eckpunkte eines vollständigen Vierecks werden harmonisch getrennt durch die auf ihrer Verbindungslinie liegende Nebenecke und den Schnittpunkt derselben mit ihrer Gegenseite.*

Treffen die Geraden ab und cd die Gerade fg in h bez. i, so sind ca, cb, cd, ch vier harmonische Strahlen (Satz 6), mithin liegen nach Satz 5 oben $fghi$ harmonisch. Also kann man auch sagen:

Im vollständigen Vierecke werden je zwei Nebenecken harmonisch getrennt durch die Punkte, in welchen ihre Verbindungslinie von den Gegenseiten getroffen werden, welche sich in der dritten Nebenecke schneiden.

Man übertrage die vorstehenden Ausführungen auf das vollständige Vierseit, indem man durchweg die Worte „Punkt“ und „Gerade“ vertauscht (vgl. S. 31).

27. Wir behalten die eingeführten Bezeichnungen bei, fassen aber die eben beschriebene Figur auf als aus einem

Dreiecke abc und einem keiner Dreiecksseite angehörigen Punkte $d = y$ bestehend. Die zu abe, bcg, caf bez. vierten harmonischen Punkte haben nach **26** die Gleichungen:

$$A - B = 0, \quad B - C = 0, \quad C - A = 0.$$

Die Summe der linken Seiten derselben ist Null, mithin liegen diese drei Punkte in gerader Linie. Also:

Sind in der Ebene ein Dreieck abc und ein keiner Dreiecksseite angehöriger Punkt y gegeben und man sucht auf jeder Seite des Dreiecks zu den beiden Ecken und ihrem Schnittpunkte mit der Verbindungslinie von y und der anderen Ecke den vierten harmonischen Punkt, so liegen diese drei Punkte in gerader Linie.

Diese Gerade heisst die Harmonikale oder Polare des Punktes y in Bezug auf das Dreieck abc oder das Dreiseit bc, ca, ab.

Ihre Gleichung in Punktcoordinaten x_i lautet, wenn noch der Punkt $B - C = 0$ mit i bezeichnet wird,

$$(hix) = 0$$

oder

$$(aby)(bcy)(cax) + (bcy)(cay)(abx) + (cay)(aby)(bcx) = 0,$$

wenn wir wieder $h_i = a_i\,(bcy) + b_i\,(acy)$ u. s. w. setzen. Nehmen wir $(bc)_i = \alpha_i$, $(ca)_i = \beta_i$, $(ab)_i = \gamma_i$, so erhalten wir Gleichung der Polaren des Punktes y in Bezug auf abc oder $\alpha\beta\gamma$ in der Form

$$(40) \qquad \alpha_x\beta_y\gamma_y + \alpha_y\beta_x\gamma_y + \alpha_y\beta_y\gamma_x = 0.$$

Obiger Satz geht bei der Vertauschung der Worte „Punkt" und „Gerade" in einen neuen richtigen Lehrsatz über, den man selbst aussprechen wolle. Mittelst des neuen Satzes findet man zu der Geraden $v_1 | v_2 | v_3$ der Ebene, die durch keinen Eckpunkt des Dreiecks abc oder $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$ geht, einen Punkt mit der Gleichung

$$(41) \qquad v_a v_b u_c + v_a u_b v_c + u_a v_b v_c = 0.$$

in Liniencoordinaten u_i.

Dieser Punkt heisst der Pol der Geraden v in Bezug auf das Dreiseit $\alpha\beta\gamma$ oder das Dreieck abc.

Setzt man in (41)

$$v_i = \alpha_i\beta_y\gamma_y + \alpha_y\beta_i\gamma_y + \alpha_y\beta_y\gamma_i \quad (i = 1, 2, 3),$$

so wird diese Gleichung zu $u_y = 0$, da

$$a_\alpha = b_\beta = c_\gamma = (abc), \quad a_\beta = a_\gamma = 0 \text{ u. s. w.},$$

$$u_a \alpha_y + u_b \beta_y + u_c \gamma_y = (abc) u_y$$

ist.

Der Punkt y ist also der Pol seiner Polaren v und folglich auch die Gerade v die Polare ihres Poles y.

§ 4. Lineare Coordinaten in der Ebene.

28. Es seien $P_1 | P_2 | P_3$ die homogenen rechtwinkligen Coordinaten des in der Ebene beweglichen Punktes P. Die Veränderlichen p_1, p_2, p_3 seien bez. lineare Formen der $P_1 | P_2 | P_3$ und unter sich unabhängig, also etwa

$$\begin{aligned} p_1 &= a_{11} P_1 + a_{21} P_2 + a_{31} P_3, \\ p_2 &= a_{12} P_1 + a_{22} P_2 + a_{32} P_3, \\ p_3 &= a_{13} P_1 + a_{23} P_2 + a_{33} P_3, \end{aligned} \tag{42}$$

wo die Determinante $\sum \pm a_{11} a_{22} a_{33}$, welche wir mit $\triangle$ bezeichnen, nicht Null ist.

Setzen wir weiter in $\triangle$

$$adj\, a_{ik} = \alpha_{ik},$$

so folgt aus (42)

$$\begin{aligned} \triangle P_1 &= \alpha_{11} p_1 + \alpha_{12} p_2 + \alpha_{13} p_3, \\ \triangle P_2 &= \alpha_{21} p_1 + \alpha_{22} p_2 + \alpha_{23} p_3, \\ \triangle P_3 &= \alpha_{31} p_1 + \alpha_{32} p_2 + \alpha_{33} p_3. \end{aligned} \tag{43}$$

Die Zahlen p und P hängen linear zusammen. Iedem Punkte $P = P_1 | P_2 | P_3$ ist durch (42) ein Werthesystem der homogenen Veränderlichen $p_1 | p_2 | p_3$ zugeordnet und umgekehrt jedem solchen Werthesysteme vermöge (43) ein Punkt der Ebene. Wir können deshalb $p_1 | p_2 | p_3$ homogene Coordinaten von P nennen und zwar mit Rücksicht auf den linearen Zusammenhang mit den homogenen rechtwinkligen Coordinaten von P, homogene (ternäre) lineare Coordinaten. Ihre geometrische Bedeutung wird nachstehend angegeben werden.

Zu den Werthen $1|0|0$, $0|1|0$, $0|0|1$, $1|1|1$ der Veränderlichen $p_1 | p_2 | p_3$ gehören nach (43) der Reihe nach die Punkte

$\alpha_{11} \mid \alpha_{21} \mid \alpha_{31}, \quad \alpha_{12} \mid \alpha_{22} \mid \alpha_{32}, \quad \alpha_{13} \mid \alpha_{23} \mid \alpha_{33}, \quad \sum \alpha_{1i} \mid \sum \alpha_{2i} \mid \sum \alpha_{3i},$
wo stets $i = 1, 2, 3$. Wir bezeichnen dieselben auch mit $ABCE$. Keine drei von diesen vier Punkten liegen in gerader Linie, da z. B. $(ABC) = \triangle^2$ nicht Null ist. Die rechtwinkligen Coordinaten von A seien $A_1 \mid A_2 \mid A_3$ u. s. w.

Nach Definition V in § 3 ist

$$A(BCEP) = \frac{(BEA)\,(CPA)}{(BPA)\,(CEA)};$$

ferner hat man

$$(BEA) = (BCA), \quad (CEA) = (CBA),$$

$$(CPA) = \begin{vmatrix} \alpha_{13} & P_1 & \alpha_{11} \\ \alpha_{23} & P_2 & \alpha_{21} \\ \alpha_{33} & P_3 & \alpha_{31} \end{vmatrix} = -\triangle(P_1 a_{12} + P_2 a_{22} + P_3 a_{32})$$

oder nach (42)

$$(CPA) = -\triangle p_2,$$

analog

$$(BPA) = \triangle p_3$$

und somit

$$A(BCEP) = \frac{p_2}{p_3}.$$

Analog ergiebt sich

$$B(CAEP) = \frac{p_3}{p_1},$$

$$C(ABEP) = \frac{p_1}{p_2}.$$

Die Verhältnisse der linearen Coordinaten $p_1 \mid p_2 \mid p_3$ des Punktes P sind also DVe. Von A gehen nach $BCEP$ vier Strahlen vom DV $\frac{p_2}{p_3}$ u. s. w. Wir nennen deshalb $p_1 \mid p_2 \mid p_3$ auch homogene DV-Coordinaten des Punktes P unserer Ebene. Die festen Punkte ABC heissen bez. der erste, zweite, dritte Grund- oder Fundamentalpunkt und E der EP des Systems von DV-Coordinaten in der Ebene. Wir bezeichnen dasselbe mit $ABCE$.

Vier beliebig in der Ebene angenommene Punkte $ABCE$, von denen keine drei in gerader Linie liegen, bestimmen ein System von DV-Coordinaten, in welchem ABC (in bestimmter Reihenfolge) die Grundpunkte und E den EP vorstellen. Denn

die lineare Substitution, welche zu dem gewünschten Systeme führt, muss die Form

$$\varrho P_i = \varkappa A_i p_1 + \lambda B_i p_2 + \mu C_i p_3 \ (i = 1, 2, 3)$$

haben und zwar muss

$$\varrho E_i = \varkappa A_i + \lambda B_i + \mu C_i \ (i = 1, 2, 3)$$

sein. Aus den letzten drei Gleichungen folgt aber:

$$\varrho : \varkappa : \lambda : \mu = (ABC) : (BCE) : (CAE) : (ABE).$$

Die Proportion der Constanten $\varrho \varkappa \lambda \mu$ ist bestimmt, (ABC), (BCE) u. s. w. nach Voraussetzung nicht Null, also führt die lineare Substitution

$$(ABC) P_i = (BCE) A_i p_1 + (CAE) B_i p_2 + (ABE) C_i p_3$$

und nur diese zu dem Systeme $ABCE$.

Beziehen wir den Punkt P der Ebene auf ein anderes rechtwinkliges System, so bleiben $p_1 | p_2 | p_3$ lineare Coordinaten desselben (S. 14).

29. Vertauschen wir in dem letzten Artikel die Worte „Punkt" und „Gerade" (S. 31), so gelangen wir zu einem Systeme von homogenen linearen Liniencoordinaten in der Ebene. An Stelle der Fundamentalpunkte treten Fundamentallinien $\mathsf{AB\Gamma}$, an Stelle des EP tritt eine Einheitslinie (EL) E. Bedeuten $u_1 | u_2 | u_3$ die homogenen linearen Coordinaten einer Geraden U der Ebene, so ist

$$\mathsf{A}(\mathsf{B\Gamma E}\, U) = \frac{u_2}{u_3}, \quad \mathsf{B}(\mathsf{\Gamma AE}\, U) = \frac{u_3}{u_1}, \quad \mathsf{\Gamma}(\mathsf{ABE}\, U) = \frac{u_1}{u_2};$$

man nennt deshalb $u_1 | u_2 | u_3$ auch homogene DV-Coordinaten der Geraden U.

Führt man in der Ebene *gleichzeitig* lineare Punkt- und Liniencoordinaten ein, so verfährt man *immer* so, dass durch die betreffenden linearen Substitutionen gerade

$$U_P = u_p \tag{44}$$

wird, wo $U_1 | U_2 | U_3$ die rechtwinkligen Coordinaten der Geraden U bedeuten. Dieses ist stets möglich und zwar kann man die Punkte $ABCE$ oder, was dasselbe besagt, die lineare Substitution (42) beliebig annehmen, wodurch wegen (43)

$$\Delta U_P = p_1(\alpha_{11} U_1 + \alpha_{21} U_2 + \alpha_{31} U_3) + p_2(\alpha_{12} U_1 + \alpha_{22} U_2 + \alpha_{32} U_3) + p_3(\alpha_{13} U_1 + \alpha_{23} U_2 + \alpha_{33} U_3)$$

wird, so dass wir, um das Gewünschte zu erreichen,

$$(45)\qquad \begin{aligned} \Delta u_1 &= \alpha_{11} U_1 + \alpha_{21} U_2 + \alpha_{31} U_3, \\ \Delta u_2 &= \alpha_{12} U_1 + \alpha_{22} U_2 + \alpha_{32} U_3, \\ \Delta u_3 &= \alpha_{13} U_1 + \alpha_{23} U_2 + \alpha_{33} U_3 \end{aligned}$$

zu setzen haben. Dieses ist erlaubt, da die Determinante $\sum \pm \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33} = \Delta^2$ nicht Null ist.

Aus (45) folgt

$$(46)\qquad \begin{aligned} U_1 &= a_{11} u_1 + a_{12} u_2 + a_{13} u_3, \\ U_2 &= a_{21} u_1 + a_{22} u_2 + a_{23} u_3, \\ U_3 &= a_{31} u_1 + a_{32} u_2 + a_{33} u_3. \end{aligned}$$

Diese lineare Substitution ist die transponirte von (42).

Die homogenen rechtwinkligen Coordinaten von $\mathsf{AB\Gamma E}$ sind nach (46)

$$a_{11} \,|\, a_{21} \,|\, a_{31}, \quad a_{12} \,|\, a_{22} \,|\, a_{32}, \quad a_{13} \,|\, a_{23} \,|\, a_{33}, \quad \sum a_{1i} \,|\, \sum a_{2i} \,|\, \sum a_{3i},$$

wo $i = 1, 2, 3$; die von E wollen wir auch mit $\mathsf{E}_1 \,|\, \mathsf{E}_2 \,|\, \mathsf{E}_3$ bezeichnen.

Man erkennt zunächst, dass $\mathsf{A} = BC$, $\mathsf{B} = CA$, $\Gamma = AB$ gewählt wurde; ferner hat der Pol von E in Bezug auf das Dreieck ABC nach (41) die Gleichung

$$\mathsf{E}_A \mathsf{E}_B U_C + \mathsf{E}_A U_B \mathsf{E}_C + U_A \mathsf{E}_B \mathsf{E}_C = 0$$

oder, da $\mathsf{E}_A = \mathsf{E}_B = \mathsf{E}_C = \Delta$, $U_A + U_B + U_C = U_E$ ist, die Gleichung

$$U_E = 0.$$

Der Punkt E und die Gerade E stehen also in der Beziehung von Pol und Polare in Bezug auf das Dreieck ABC oder das Dreiseit $\mathsf{AB\Gamma}$.

30. Bedeuten in einem linearen Coordinatensysteme der zuletzt beschriebenen Art $p_1 \,|\, p_2 \,|\, p_3$ die Coordinaten eines Punktes P, $u_1 \,|\, u_2 \,|\, u_3$ diejenigen einer Geraden U, so werden wir auch kurz von dem Punkte $p_1 \,|\, p_2 \,|\, p_3$ bez. der Geraden $u_1 \,|\, u_2 \,|\, u_3$ sprechen. Jedes ternäre homogene Werthesystem

kann jetzt wieder ein Punkt bez. eine Gerade genannt werden (vgl. Def. I und II in § 3).

Der Punkt $p_1 | p_2 | p_3$ und die Gerade $u_1 | u_2 | u_3$ liegen nach (44) dann und nur dann aneinander, wenn $u_p = 0$ ist (vgl. Def. III).

Von dem Punkte X gehen nach den Punkten $PQRS$ vier Strahlen, deren DV aus den linearen Coordinaten dieser Punkte berechnet werden soll. Bedeuten allgemein $X_1 | X_2 | X_3$ die rechtwinkligen, $x_1 | x_2 | x_3$ die linearen Coordinaten von X, so ist nach Def. V

$$X(PQRS) = \frac{(PRX)}{(PSX)} \frac{(QSX)}{(QRX)},$$

wegen (42) aber

$$(prx) = \triangle(PRX), \quad (qsx) = \triangle(QSX)$$

u. s. w., also

$$X(PQRS) = \frac{(prx)}{(psx)} \frac{(qsx)}{(qrx)}.$$

Diese Formel giebt uns zugleich das DV von vier Punkten, wenn wir unter PQ u. s. w. Gerade, unter p_i, q_i u. s. w. lineare Liniencoordinaten verstehen.

In beiden Ausdrücken kommen *nur* die linearen Coordinaten der betr. Punkte oder Geraden vor, nicht die das lineare System bestimmenden Constanten a_{ik}. Man erkennt ferner, dass das DV von vier Punkten oder Geraden sich aus den linearen Coordinaten genau so berechnet, wie aus den rechtwinkligen (vgl. Def. IV und V).

Alle analytischen Entwicklungen, welche sich nur auf die Definitionen I — V stützen, gelten ebenso gut für lineare, wie für rechtwinklige Coordinaten.

Führt man also z. B. in einer Geraden unter zu Grundelegung linearer Coordinaten eine Parameterdarstellung (31) ein, so bedeutet der Parameter wieder ein DV. Aus (31) und (42) folgt aber,

$$\varrho(a_{1i}X_1 + a_{2i}X_2 + a_{3i}X_3) = \lambda_1(a_{1i}A_1 + a_{2i}A_2 + a_{3i}A_3) + \lambda_2(a_{1i}B_1 + a_{2i}B_2 + a_{3i}B_3),$$

wo $i = 1, 2, 3$. Da $\sum \pm a_{11}a_{22}a_{33}$ nicht Null ist, muss

$$\varrho X_i = \lambda_1 A_i + \lambda_2 B_i \ (i = 1, 2, 3)$$

sein; λ ist mithin wieder lineare Coordinate von X im Sinne des Artikels **17**.

31. Wir führen jetzt in der Ebene specielle homogene lineare Coordinaten (**29**) in folgender Weise ein: Als erste und zweite Fundamentallinie A und B wählen wir zwei eigentliche, aufeinander senkrecht stehende gerade Linien, als dritte Γ die unendlich ferne Gerade $0|0|1$ der Ebene, zum EP E einen eigentlichen Punkt, welcher von A und B gleiche Distanz EE_2 bez. EE_1 hat. Die Punkte AB, BΓ, ΓA bezeichnen wir wieder mit CAB.

Der nicht unendlich ferne Punkt P der Ebene besitze in diesem Systeme die homogenen Coordinaten $x_1 | x_2 | x_3$, im rechtwinkligen die Coordinaten $x_1' | x_2' | x_3'$, die Gerade U im ersteren die Coordinaten $u_1 | u_2 | u_3$, im letzteren die Coordinaten $u_1' | u_2' | u_3'$. Die Gerade BP, parallel zu A, treffe B in P_x, die Gerade AP, parallel zu B, treffe A in P_y. Dann ist (**24**, Satz 5, 6)

$$A(BCEP) = (BCE_2P_y),$$

nach **28**

$$A(BCEP) = \frac{x_2}{x_3},$$

somit

$$(BCE_2P_y) = \frac{x_2}{x_3}.$$

Nun ist aber B der unendlich ferne Punkt der Geraden A, also $\frac{x_2}{x_3}$ die Abscisse von P_y im Systeme CE_2 (7, 2). Analog weist man $\frac{x_1}{x_3}$ als Abscisse von P_x im Systeme CE_1 nach. Im betrachteten Specialfalle sind also $x_1 | x_2 | x_3$ homogene rechtwinklige Coordinaten von P in einem Systeme mit der Abscissenaxe B, der Ordinatenaxe A und dem EP E (**13**).

In diesem Systeme besitzt die Gerade U die Gleichung $u_x = 0$; nach **15** sind daher $u_1 | u_2 | u_3$ homogene rechtwinklige Coordinaten von U. Also:

Die homogenen rechtwinkligen Punkt- und Liniencoordinaten sind besondere homogene lineare oder DV-Coordinaten.

Die EL E mit der Gleichung $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ schneidet hier die Axen A und B in Punkten E_2' bez. E_1' so, dass die

Strecken CE_1 und CE_1', CE_2 und CE_2' entgegengesetzt gleich sind. Die Gleichungen $\mathsf{A}(\mathsf{B}\Gamma\mathsf{E}\,U) = \frac{u_2}{u_3}$ u. s. w. (29) liefern eine geometrische Deutung der homogenen rechtwinkligen Liniencoordinaten.

Da wir ferner im behandelten Specialfalle $a_{13} = a_{23} = 0$ zu setzen haben, so gehen die Formeln (42) und (46) bez. in die Formeln (29) und (30) über; wir haben somit bewiesen, dass die Formeln für die Transformation der rechtwinkligen Coordinaten die in **15** angegebene Form haben.

§ 5. Die einförmigen Grundgebilde.

32. Unsere seitherigen Untersuchungen erstreckten sich theils auf die *einzelne* Gerade (§ 1 und 2), theils auf die *einzelne* Ebene (§ 3 und 4). Um jetzt beliebig viele Punkte und Gerade — diese Elemente zunächst im eigentlichen Sinne verstanden — und Ebenen des Raumes gleichzeitig in Betracht ziehen zu können, müssen wir ein *räumliches Coordinatensystem* einführen. Dieses geschieht in folgender Weise:

Durch einen Punkt O legen wir drei zu je zweien rechtwinklige Gerade OX, OY, OZ und führen ein Abscissensystem OE_1 in OX, OE_2 in OY, OE_3 in OZ ein, wobei wir $OE_1 = OE_2 = OE_3$ wählen.

Schneiden alsdann die drei durch den Punkt P des Raumes gehenden zu den drei Ebenen OYZ, OZX, OXY bez. parallelen Ebenen die Geraden OX, OY, OZ bez. in P_x, P_y, P_z und sind x, y, z die Abscissen von P_x, P_y, P_z in den betr. Systemen OE_1, OE_2, OE_3, so sind x, y, z rechtwinklige Coordinaten des Raumpunktes P.

Die Geraden OX, OY, OZ heissen die Coordinatenaxen, die von ihnen bestimmten Ebenen die Coordinatenebenen; der Punkt O wird der Anfangspunkt der Coordinaten genannt.

Die Coordinaten $x|y|z$ eines Punktes P sind endliche Zahlen; man kann deshalb (vgl. **15**) $x = \frac{x_1}{x_4}$, $y = \frac{x_2}{x_4}$, $z = \frac{x_3}{x_4}$ setzen und dadurch zu homogenen (quaternären) rechtwinkligen Coordinaten $x_1|x_2|x_3|x_4$ eines Punktes P des Raumes gelangen.

Die vierte homogene Coordinate eines Punktes ist v. d. H. von Null verschieden.

Unter dem Punkte $x_1 | x_2 | x_3 | x_4$ verstehen wir den Punkt dieser homogenen Coordinaten.

Der Punkt $1|1|1|1$ heisst der EP des Systems. Der EP zusammen mit den drei Axen bestimmt ein rechtwinkliges räumliches Coordinatensystem.

33. Der Punkt P bewege sich auf einer Geraden AB des Raumes, die nicht homogenen Coordinaten von PAB seien bez. $x|y|z$, $x'|y'|z'$, $x''|y''|z''$ und μ bedeute das Theilverhältniss der Strecke AB im Punkte P (**1**). Dann ist

$$\mu = \frac{x - x'}{x'' - x} = \frac{y - y'}{y'' - y} = \frac{z - z'}{z'' - z},$$

woraus sich

$$x = \frac{x' + \mu x''}{1 + \mu}, \quad y = \frac{y' + \mu y''}{1 + \mu}, \quad z = \frac{z' + \mu z''}{1 + \mu} \tag{48}$$

ergiebt.

Mit Hülfe eines Parameters μ kann man die Coordinaten $x|y|z$ eines jeden Punktes der Geraden AB in der Form (48) darstellen; μ ist Theilverhältnisscoordinate von P und kann jeden reellen Werth annehmen, ausser -1.

Wir führen jetzt, indem wir $x = \frac{x_1}{x_4}$ u. s. w., $x' = \frac{x_1'}{x_4'}$ u. s. w., $x'' = \frac{x_1''}{x_4''}$ u. s. w. setzen, homogene Coordinaten und durch die Substitution

$$\mu = \frac{x_4''}{x_4'} \cdot \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

einen neuen Parameter $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \lambda$ in (48) ein. Es wird

$$\begin{aligned} \varrho x_1 &= \lambda_1 x_1' + \lambda_2 x_1'', \\ \varrho x_2 &= \lambda_1 x_2' + \lambda_2 x_2'', \\ \varrho x_3 &= \lambda_1 x_3' + \lambda_2 x_3'', \\ \varrho x_4 &= \lambda_1 x_4' + \lambda_2 x_4'', \end{aligned} \tag{49}$$

wo ϱ eine endliche, von Null verschiedene Zahl bedeutet.

Hierdurch ist uns eine Parameterdarstellung in der Geraden AB des Raumes unter Benutzung homogener Coordinaten gegeben. Der Parameter λ kann jeden reellen

Werth annehmen (da wir v. d. H. als homogene Coordinaten eines Punktes reelle Zahlen nehmen können), nur der Werth $-\frac{x_4''}{x_4'}$ von λ ist zunächst auszuschliessen.

Bezeichnen wir die Adjunkte des $i$ten Elementes der ersten Zeile im Systeme

$$\begin{matrix} * & * & * & * \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1' & x_2' & x_3' & x_4' \\ x_1'' & x_2'' & x_3'' & x_4'' \end{matrix}$$

allgemein mit $(xx'x'')_i$, so wird nach (49) für drei Punkte ABP einer Geraden

$$(xx'x'')_1 = (xx'x'')_2 = (xx'x'')_3 = (xx'x'')_4 = 0$$

und umgekehrt. Denn da nicht

$$x_1' : x_2' : x_3' : x_4' = x_1'' : x_2'' : x_3'' : x_4''$$

vorauszusetzen ist, wird eine dieser Determinanten, etwa $(xx'x'')_4$, verschwinden, ohne dass $x_1' : x_2' : x_3' = x_1'' : x_2'' : x_3''$ ist und die Elemente einer Horizontalreihe gleichzeitig Null sind. Wir können deshalb nach **17**

$$\varrho x_1 = \lambda_1 x_1' + \lambda_2 x_1'', \quad \varrho x_2 = \lambda_1 x_2' + \lambda_2 x_2'', \quad \varrho x_3 = \lambda_1 x_3' + \lambda_2 x_3''$$

setzen. Dann ist

$$\varrho (xx'x'')_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \varrho x_4 - \lambda_1 x_4' - \lambda_2 x_4'' \\ x_2' & x_3' & x_4' \\ x_2'' & x_3'' & x_4'' \end{vmatrix} = 0$$

nach Voraussetzung, also

$$(\varrho x_4 - \lambda_1 x_4' - \lambda_2 x_4'')\ (x_2' x_3'' - x_2'' x_3') = 0,$$

analog

$$(\varrho x_4 - \lambda_1 x_4' - \lambda_2 x_4'')\ (x_3' x_1'' - x_3'' x_1') = 0,$$

$$(\varrho x_4 - \lambda_1 x_4' - \lambda_2 x_4'')\ (x_1' x_2'' - x_1'' x_2') = 0.$$

Es ist mithin

$$\varrho x_4 = \lambda_1 x_4' + \lambda_2 x_4'',$$

wir sind zur Parameterdarstellung (49) gelangt und erkennen, dass P der Geraden AB angehört.

Bezeichnen wir die Abscisse von P im Systeme AB mit P, so ist

$$(50) \qquad P = \frac{AP}{AB} = \frac{\mu}{\mu + 1} = \frac{\lambda_2 x_4''}{\lambda_1 x_4' + \lambda_2 x_4''}.$$

Da die Determinante

$$\begin{vmatrix} 0 & x_4'' \\ x_4' & x_4'' \end{vmatrix}$$

nicht Null ist, so sind $\lambda_1 \mid \lambda_2$ *homogene lineare Coordinaten des Punktes* P im Sinne des § 2.

Das DV von vier Punkten $PQRS$ unserer Geraden mit den Parametern $\varkappa\lambda\mu\nu$ ist mithin nach (23)

$$(51) \qquad (PQRS) = \frac{(\varkappa\mu)\ (\lambda\nu)}{(\varkappa\nu)\ (\lambda\mu)},$$

wenn $\varkappa = \frac{\varkappa_1}{\varkappa_2}$ u. s. w.

34. Wir wollen allgemein den Punkt $a_1 \mid a_2 \mid a_3 \mid a_4$ mit a bezeichnen.

Liegen die vier Punkte $abcx$ in einer Ebene, aber keine drei derselben in gerader Linie, so schneidet sich von den Gegenseiten des vollständigen Vierecks $abcx$ mindestens ein Paar, etwa ab und cx, in einem Punkte d. Nach **33** können wir einerseits

$$d_i = \varkappa_1 a_i + \varkappa_2 b_i \ (i = 1, 2, 3, 4),$$

andererseits

$$d_i = \varkappa_3 c_i + \varkappa_4 x_i \ (i = 1, 2, 3, 4)$$

setzen. Die Coordinaten von $abcx$ erfüllen also die Gleichungen

$$\varkappa_1 a_i + \varkappa_2 b_i - \varkappa_3 c_i - \varkappa_4 x_i = 0 \ (i = 1, 2, 3, 4).$$

Aus ihnen erhalten wir durch Elimination der Zahlen $\varkappa_i$

$$(52) \qquad (abcx) = 0,$$

wenn allgemein $(abcx)$ die Determinante $\sum \pm a_1 b_2 c_3 x_4$ vorstellt.

Erfüllen umgekehrt die Coordinaten $x_1 \mid x_2 \mid x_3 \mid x_4$ von x die Gleichung (52), so liegt x in der Ebene abc. Denn liegt y auf ax, bx oder cx, so ist bei $(abcx) = 0$ wegen (49) auch $(abcy) = 0$; wenn nun x nicht der Ebene abc angehörte, so würde jeder Punkt der Geraden ax, bx oder cx, folglich jeder Punkt der Ebene abx u. s. w., mithin jeder Punkt des Raumes die Gleichung $(abcx) = 0$ erfüllen, $(abcx)$ wäre identisch

Null, d. h. abc lägen in gerader Linie (**33**), was hier ausgeschlossen wird.

Auf Grund dieser Ausführungen wird (52) die Gleichung der Ebene abc in homogenen Punktcoordinaten x_i genannt.

Der Ausdruck $(abcx)$ ist von der Form $u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4$. Wir können sonach für (52)

$$u_x = 0$$

schreiben, wenn allgemein $u_1 x_1 + \cdots = u_x$ gesetzt wird. Es sind hier die Coefficienten u_i reelle, endliche Zahlen und u_1, u_2, u_3 nicht gleichzeitig Null.

Jede Gleichung $u_x = 0$ ist, wenn die Coefficienten u_i die eben genannten Eigenschaften besitzen, die Gleichung einer bestimmten Ebene. Um dieses zu beweisen, bestimmen wir die homogenen, reellen Werthesysteme $a_1 | a_2 | a_3 | a_4$, $b_1 | b_2 | b_3 | b_4$, $c_1 | c_2 | c_3 | c_4$ bei von Null verschiedenen a_4, b_4, c_4 so, dass $u_a = u_b = u_c = 0$ ist; dabei können wir vermeiden, dass die Punkte abc dieser Coordinaten in gerader Linie liegen; denn ist etwa u_1 von Null verschieden, so können wir x_2, x_3, x_4 willkürlich annehmen und aus $u_x = 0$ ein endliches x_1 berechnen. Aus $u_a = u_b = u_c = u_x = 0$ folgt dann $(abcx) = 0$, d. h. x liegt in der Ebene abc (siehe oben).

Die Ebenen $u_x = 0$ und $\varrho u_x = 0$ sind nicht verschieden, wenn ϱ endlich und nicht Null ist.

Nach dem Vorhergehenden können die Coefficienten $u_1 | u_2 | u_3 | u_4$ homogene (quaternäre) Coordinaten einer Ebene des Raumes genannt werden (**4**).

Die drei ersten homogenen Ebenencoordinaten sind v. d. H. nicht gleichzeitig Null, $u_1 | u_2 | u_3 | u_4$ können zunächst reell angenommen werden.

Die Ebene der Coordinaten $u_1 | u_2 | u_3 | u_4$ soll allgemein mit u bezeichnet werden.

Von einem Punkte und einer Ebene, ebenso von einer Geraden und einer Ebene, sagen wir, dass sie aneinanderliegen*) (incident sind), wenn die Ebene den Punkt bez. die Gerade enthält.

---

*) Vgl. Pasch, l. c.

In Folge dieser Erklärung können wir nach Obigem sagen:

Ein Punkt x und eine Ebene u liegen dann und nur dann aneinander, wenn $u_x = 0$ ist.

Beziehen wir einen Punkt auf zwei verschiedene rechtwinklige Coordinatensysteme R_1 und R_2, so ist, wenn derselbe die homogenen Coordinaten $x_1 | x_2 | x_3 | x_4$ in R_1, $x_1' | x_2' | x_3' | x_4'$ in R_2 besitzt,

$$
\begin{aligned}
x_1 &= a_{11} x_1' + a_{21} x_2' + a_{31} x_3' + a_{41} x_4', \\
x_2 &= a_{12} x_1' + a_{22} x_2' + a_{32} x_3' + a_{42} x_4', \\
x_3 &= a_{13} x_1' + a_{23} x_2' + a_{33} x_3' + a_{43} x_4', \\
x_4 &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad a_{44} x_4',
\end{aligned} \tag{53}
$$

wo die Determinante

$$
\triangle = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{43} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix}
$$

nicht Null ist und die a_{ik} nur von der Lage der Bestimmungselemente der Systeme R_1 und R_2 gegeneinander abhängig sind. Dieses wird in **59** nachgewiesen werden.

Besitzt nun eine Ebene die Coordinaten $u_1 | u_2 | u_3 | u_4$ in R_1, $u_1' | u_2' | u_3' | u_4'$ in R_2, so lautet ihre Gleichung in R_2 nach (53)

$$
\begin{aligned}
&x_1'(a_{11} u_1 + a_{12} u_2 + a_{13} u_3) \\
&+ x_2'(a_{21} u_1 + a_{22} u_2 + a_{23} u_3) + x_3'(a_{31} u_1 + a_{32} u_2 + a_{33} u_3) \\
&+ x_4'(a_{41} u_1 + a_{42} u_2 + a_{43} u_3 + a_{44} u_4) = 0,
\end{aligned}
$$

sodass wir

$$
\begin{aligned}
u_1' &= a_{11} u_1 + a_{12} u_2 + a_{13} u_3, \\
u_2' &= a_{21} u_1 + a_{22} u_2 + a_{23} u_3, \\
u_3' &= a_{31} u_1 + a_{32} u_2 + a_{33} u_3, \\
u_4' &= a_{41} u_1 + a_{42} u_2 + a_{43} u_3 + a_{44} u_4
\end{aligned} \tag{54}
$$

zu setzen haben, um die homogenen Ebenencoordinaten zu transformiren.

35. Um zu untersuchen, ob zwei Ebenen u und v Punkte gemein haben und welche Punkte, haben wir die Gleichungen $u_x = 0$, $v_x = 0$ zu betrachten, welchen unendlich viele Werthe-

systeme der homogenen Veränderlichen $x_1 | x_2 | x_3 | x_4$ genügen. Setzen wir allgemein

$$u_i v_k - u_k v_i = \pi_{ik} = - \pi_{ki},$$

so folgt aus $u_x = 0$ und $v_x = 0$

$$(55)\quad \begin{aligned} \pi_{21}x_2 + \pi_{31}x_3 + \pi_{41}x_4 &= 0, \\ \pi_{12}x_1 + \pi_{32}x_3 + \pi_{42}x_4 &= 0, \\ \pi_{13}x_1 + \pi_{23}x_2 + \pi_{43}x_4 &= 0, \\ \pi_{14}x_1 + \pi_{24}x_2 + \pi_{34}x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Ist nun $\pi_{21} = \pi_{31} = \pi_{32} = 0$, also $u_1 : u_2 : u_3 = v_1 : v_2 : v_3$, so können π_{41}, π_{42}, π_{43} nicht gleichzeitig verschwinden, also muss $x_4 = 0$ sein. Von gemeinsamen Punkten der Ebenen u und v kann dann zunächst nicht gesprochen werden. Die Ebenen sind in diesem Falle parallel, da sie entweder zu einer und derselben Coordinatenebene parallel sind oder die Coordinatenebenen bez. in parallelen Geraden schneiden (**16**). Parallele Ebenen haben gleiche Stellung, ihre Normalen gleiche Richtung. Die Stellung einer Ebene u ist durch die Proportion ihrer drei ersten Coordinaten bedingt, weshalb $u_1 | u_2 | u_3$ als homogene Coordinaten der Stellung der Ebene u bez. der Richtung ihrer Normalen bezeichnet werden können.

In jedem anderen Falle haben die Ebenen Punkte gemein, die eine Gerade erfüllen.

Liegen auf der Schnittlinie S zweier Ebenen u und v die Punkte x und y, so ist nach (55) erste Gleichung

$$\pi_{21}x_2 + \pi_{31}x_3 + \pi_{41}x_4 = 0,$$
$$\pi_{21}y_2 + \pi_{31}y_3 + \pi_{41}y_4 = 0,$$

also

$$\pi_{21} : \pi_{31} : \pi_{41} = p_{34} : p_{42} : p_{23},$$

wenn allgemein

$$x_i y_k - x_k y_i = p_{ik} = - p_{ki}$$

gesetzt wird; die anderen Gleichungen in (55) liefern ähnliche Proportionen, sodass schliesslich

$$(56)\quad p_{12} : p_{13} : p_{14} : p_{34} : p_{42} : p_{23} = \pi_{34} : \pi_{42} : \pi_{23} : \pi_{12} : \pi_{13} : \pi_{14}$$

wird.

Die Proportion der p_{ik} ist darnach unabhängig von der Wahl der Punkte x und y an der Geraden S, ebenso die

Proportion der π_{ik} unabhängig von der Wahl der Ebenen u und v an S.

Die Zahlen p_{ik} sind unter sich nicht unabhängig, desgleichen die Zahlen π_{ik}. Denn entwickelt man die Determinante $(xyxy)$ nach den Subdeterminanten der beiden ersten Zeilen ihres Systems, so erhält man $2(p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23})$. Da aber $(xyxy) = 0$ ist, hat man

$$p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = 0 \tag{57}$$

und analog

$$\pi_{12}\pi_{34} + \pi_{13}\pi_{42} + \pi_{14}\pi_{23} = 0. \tag{58}$$

Jeder Geraden des Raumes ist in dieser Weise ein homogenes Werthesystem $p_{12} | p_{13} | p_{14} | p_{34} | p_{42} | p_{23} = \pi_{34} | \pi_{42} | \pi_{23} | \pi_{12} | \pi_{13} | \pi_{14}$ zugeordnet. Die p_{ik} und π_{ik} sind zunächst reell, p_{14}, p_{34}, p_{42} verschwinden nicht gleichzeitig, ebenso π_{23}, π_{12}, π_{13} und es bestehen die Gleichungen (57) und (58).

Ist umgekehrt ein homogenes Werthesystem $p_{12} | p_{13} \cdots = \pi_{34} | \pi_{42} \cdots$ der eben geschilderten Art gegeben, so kann man mit Hülfe der Gleichungen (55) und (56) *eine* Gerade S derart bestimmen, dass für irgend zwei an ihr liegende Punkte x und y

$$\varrho p_{ik} = x_i y_k - x_k y_i$$

und für irgend zwei an ihr liegende Ebenen u und v

$$\sigma \pi_{ik} = u_i v_k - u_k v_i$$

wird, wo ϱ und σ endliche, von Null verschiedene Zahlen bedeuten.

Wir können daher $p_{12} | p_{13} \cdots = \pi_{34} | \pi_{42} | \cdots$ homogene Coordinaten einer Geraden des Raumes nennen.

Liegen zwei Gerade $p = xy$ und $q = x'y'$ in einer Ebene, so ist für $p_{ik} = x_i y_k - x_k y_i$, $q_{ik} = x_i' y_k' - x_k' y_i'$, da nach (52) $(xyx'y') = 0$ ist,

$$p_{12}q_{34} + p_{13}q_{42} + p_{14}q_{23} + p_{34}q_{12} + p_{42}q_{13} + p_{23}q_{14} = 0.$$

Erfüllen umgekehrt die Coordinaten p_{ik}, q_{ik} von zwei Geraden p und q diese Gleichung, so liegen dieselben in einer Ebene.

Denn für $p_{ik} = x_i y_k - x_k y_i$, $q_{ik} = x_i' y_k' - x_k' y_i'$ folgt aus jener Gleichung $(xyx'y') = 0$, also liegen p und q in einer Ebene; denn von den Punkten $xyx'y'$ liegen dann entweder drei in einer Geraden (**33**) oder alle vier liegen in einer Ebene (**34**). Also:

Zwei Gerade $p = p_{12} | p_{13} | \ldots$ *und* $q = q_{12} | p_{13} \ldots$ *des Raumes liegen dann und nur dann in einer Ebene, wenn*

$$(59)\qquad p_{12}q_{34} + p_{13}q_{42} + p_{14}q_{23} + p_{34}q_{12} + p_{42}q_{13} + p_{23}q_{14} = 0$$

ist.

36. Drei Ebenen uvw haben im Allgemeinen einen Punkt gemein. Denn aus

$$u_x = 0, \quad v_x = 0, \quad w_x = 0$$

folgt

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = (uvw)_1 : (uvw)_2 : (uvw)_3 : (uvw)_4.$$

Verschwinden die Determinanten $(uvw)_i$ sämmtlich, so ist in Folge der bekannten Identität

$$u_x(vw\alpha\beta) - v_x(uw\alpha\beta) + w_x(uv\alpha\beta) - \alpha_x(uvw\beta) + \beta_x(uvw\alpha) = 0,$$

da nach Voraussetzung

$$(uvw\alpha) = (uvw\beta) = 0,$$

$$(60)\qquad u_x(vw\alpha\beta) - v_x(uw\alpha\beta) + w_x(uv\alpha\beta) = 0,$$

wo die Ebenen α und β so gewählt seien, dass $(uv\alpha\beta)$, $(uw\alpha\beta)$, $(vw\alpha\beta)$ nicht verschwinden. Wenn also u_x und v_x gleichzeitig verschwinden, so verschwindet auch w_x. *Im Falle* $(uvw)_i = 0$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ *haben die Ebenen* uvw *eine Gerade gemein oder sie sind zu je zweien parallel* (**35**).

Auch die Umkehrung gilt. Denn liegen die Ebenen uvw an einer Geraden xy, so ist

$$u_x = v_x = w_x = u_y = v_y = w_y = 0;$$

hieraus folgt

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = (uvw)_1 : \cdots\cdots = y_1 : y_2 : y_3 : y_4$$

nun sind aber x und y verschiedene Punkte, also müssen die Determinanten sämmtlich Null sein. U. s. w.

Verschwindet ferner $(uvw)_4$, ohne dass alle übrigen $(uvw)_i$ Null sind, so sind entweder zwei der drei Ebenen uvw parallel,

z. B. u und v bei $u_1 : u_2 : u_3 = v_1 : v_2 : v_3$ (**35**), oder die drei Ebenen schneiden sich in drei zu je zweien parallelen Geraden. Um das Letztere einzusehen, setze man

(61) $$\varrho w_i = \lambda_1 u_i + \lambda_2 v_i \quad (i = 1, 2, 3),$$

was wegen $(uvw)_4 = 0$ möglich (**17**). Die Ebene $\lambda_1 u_x + \lambda_2 v_x = 0$ geht durch die Gerade uv und ist parallel zu w (**35**), also sind uv und uw, uv und vw parallel. Von einem Schnittpunkte der Geraden $p = uv$ und $p' = uw$ kann dann zunächst nicht gesprochen werden, da $(uvw)_4 = 0$ ist. Es ist ferner wegen (61)

$$\pi_{23} : \pi_{12} : \pi_{13} = \pi_{23}' : \pi_{12}' : \pi_{13}',$$

wenn $\pi_{34} | \pi_{42} \ldots$ und $\pi_{34}' | \pi_{42}' | \ldots$ die Coordinaten von p und p' bedeuten. Umgekehrt folgt aus dieser Proportion nach (59) und (58), dass die Geraden p und p' in einer Ebene liegen; setzt man dann weiter $p = uv$, $p' = uw$, so wird $(uvw)_4 = 0$. Also:

Zwei Gerade $p = \pi_{34} | \pi_{42} \ldots$ und $p' = \pi_{34}' | \pi_{42}' | \ldots$ sind dann und nur dann parallel, wenn

$$\pi_{23} : \pi_{12} : \pi_{13} = \pi_{23}' : \pi_{12}' : \pi_{13}'$$

ist.

Man kann daher $\pi_{23} | \pi_{12} | \pi_{13}$ als homogene Coordinaten der Richtung der Geraden $p = \pi_{34} | \pi_{12} | \ldots$ bezeichnen.

Die Ebene t geht dann und nur dann durch den Punkt uvw, wenn (**34**)

$$t_1 (uvw)_1 + t_2 (uvw)_2 + t_3 (uvw)_3 + t_4 (uvw)_4 = 0$$

oder

(62) $$(uvwt) = 0$$

ist. Aus dieser Gleichung folgt jedoch nicht, dass die Ebenen $uvwt$ einen Punkt gemein haben. Denn die Determinante $(uvwt)$ ist z. B. auch dann nach Obigem Null, wenn von den vier Ebenen drei unter sich parallel sind.

37. Die Schnittlinie uv zweier Ebenen u und v werde von den vier Ebenen $\alpha\beta\gamma\delta$ in den Punkten $PQRS$ geschnitten; es soll das DV dieser vier Punkte berechnet werden.

Wir führen in der Geraden uv eine Parameterdarstellung $\varrho x_i = \lambda_1 y_i + \lambda_2 z_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ ein (**33**). Den Parameter von P findet man aus der Gleichung

$$\lambda_1 \alpha_y + \lambda_2 \alpha_z = 0$$

als $-\frac{\alpha_z}{\alpha_y}$, u. s. w. Es ist also nach (51) zunächst

$$(PQRS) = \frac{(\alpha_z \gamma_y - \alpha_y \gamma_z)(\beta_z \delta_y - \beta_y \delta_z)}{(\alpha_z \delta_y - \alpha_y \delta_z)(\beta_z \gamma_y - \beta_y \gamma_z)}.$$

Nun wird aber z. B.

$$\begin{vmatrix} \alpha_y & \alpha_z \\ \gamma_y & \gamma_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \gamma_1 & \gamma_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y_1 & y_3 \\ z_1 & z_3 \end{vmatrix} +$$

oder, da wir nach (56)

$$y_1 z_2 - y_2 z_1 = u_3 v_4 - u_4 v_3$$

u. s. w setzen können,

$$\alpha_y \gamma_z - \alpha_z \gamma_y = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u_3 & u_4 \\ v_3 & v_4 \end{vmatrix} + \cdots - \cdots = (\alpha \gamma u v)$$

u. s. w., schliesslich also

$$(63) \qquad (PQRS) = \frac{(\alpha \gamma u v)(\beta \delta u v)}{(\alpha \delta u v)(\beta \gamma u v)}.$$

Dieses DV soll auch mit $uv(\alpha\beta\gamma\delta)$ bezeichnet werden.

38. Die Gesammtheit der an einer Geraden des Raumes liegenden Ebenen heisst ein Ebenenbüschel; die Gerade heisst die Axe oder der Träger des Ebenenbüschels.

Es seien v und w zwei feste, u eine bewegliche Ebene eines Ebenenbüschels. Sind dann α und β zwei beliebige andere Ebenen, deren Schnittlinie mit der Geraden vw nicht in einer Ebene liegt, so können wir nach (60)

$$u_i(vw\alpha\beta) = v_i(uw\alpha\beta) - w_i(uv\alpha\beta)$$

setzen; wir haben dann die Coordinaten der beweglichen Ebene u durch die der festen Ebenen v und w in der Form

$$(64) \qquad \lambda_1 v_1 + \lambda_2 w_1 \,|\, \lambda_1 v_2 + \lambda_2 w_2 \,|\, \lambda_1 v_3 + \lambda_2 w_3 \,|\, \lambda_1 v_4 + \lambda_2 w_4$$

dargestellt, wo $\lambda_1 \,|\, \lambda_2$ homogene Veränderliche sind. Jedem reellen Werthe von $\lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ entspricht eine Ebene des Büschels. Die Darstellung (64) nennt man eine Parameterdarstellung im Ebenenbüschel. Da die Zahlen $\lambda_1 \,|\, \lambda_2$ linear von

$u_1 \mid u_2 \mid u_3 \mid u_4$ abhängen und umgekehrt, so können wir $\lambda_1 \mid \lambda_2$ auch *lineare Coordinaten der Ebene u im Büschel* nennen; sie unterliegen v. d. H. der Beschränkung, dass $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ reell sein muss.

Es handelt sich jetzt um die geometrische Deutung dieses Parameters. Zu dem Ende berechnen wir vorerst das DV, nach welchem vier Ebenen $KLMN$ unseres Büschels mit den Parametern $\frac{\varkappa_1}{\varkappa_2}$, $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$, $\frac{\mu_1}{\mu_2}$, $\frac{\nu_1}{\nu_2}$ von einer Geraden st geschnitten werden. Hierzu brauchen wir (63); es wird z. B.

$$\begin{vmatrix} \varkappa_1 v_1 + \varkappa_2 w_1 & \mu_1 v_1 + \mu_2 w_1 & s_1 & t_1 \\ \varkappa_1 v_2 + \varkappa_2 w_2 & \mu_1 v_2 + \mu_2 w_2 & s_2 & t_2 \\ \varkappa_1 v_3 + \varkappa_2 w_3 & \mu_1 v_3 + \mu_2 w_3 & s_3 & t_3 \\ \varkappa_1 v_4 + \varkappa_2 w_4 & \mu_1 v_4 + \mu_2 w_4 & s_4 & t_4 \end{vmatrix} = (\varkappa\mu)(vwst)$$

u. s. w., also das gesuchte DV gleich

$$\frac{(\varkappa\mu)(\lambda\nu)}{(\varkappa\nu)(\lambda\mu)},$$

wenn $(vwst)$ nicht Null ist. Zugleich ergiebt sich:

Vier Ebenen eines Büschels werden von jeder Geraden, welcher keiner Ebene des Büschels angehört, nach demselben DV geschnitten.

Man nennt dieses DV das DV der vier Ebenen. Das DV von vier Ebenen $KLMN$ wird mit $(KLMN)$ bezeichnet; man behält im Ebenenbüschel die in 2 und 8 für die Punktreihe eingeführten Bezeichnungen bei. Im Falle $(KLMN) = -1$ heissen also die vier Ebenen harmonisch u. s. w.

Nach Obigem haben wir die Gleichung

$$(KLMN) = \frac{(\varkappa\mu)(\lambda\nu)}{(\varkappa\nu)(\lambda\mu)}. \tag{65}$$

Zu den Parametern ∞, 0, 1 gehören bez. die Ebenen vwe, wenn $e_i = v_i + w_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ gesetzt wird. Aus (65) folgt, wenn λ der Parameter von u bedeutet,

$$(vweu) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \lambda.$$

Der Parameter λ bedeutet also ein DV, welches die zugehörige Ebene u mit drei festen Ebenen bildet, deren Parameter bez. ∞, 0, 1 sind.

Man bezeichnet daher $\lambda_1 | \lambda_2$ auch als homogene DV-Coordinaten im Ebenenbüschel. Man nennt v die erste Grundebene oder die Unendlichkeitsebene (UE), w die zweite Grundebene oder die Nullebene (NE), e die Einheitsebene (EE) des Systems von DV-Coordinaten im Ebenenbüschel.

Drei beliebig im Büschel angenommene Ebenen vwe bestimmen ein System von DV-Coordinaten, in welchem v und w die Grundebenen, e die EE vorstellen (vgl. das Analogon **24**).

Vermittelst (65) lösen wir jetzt die *Aufgabe:*

Durch die Gerade, welche zwei Punkte x und y verbindet, gehen nach vier Punkten $abcd$ des Raumes vier Ebenen $\alpha\beta\gamma\delta$, deren DV berechnet werden soll.

Wir führen im Ebenenbüschel xy eine Parameterdarstellung ein, berechnen die Parameter der Ebenen $\alpha\beta\gamma\delta$, wenden (65) an und führen mittelst (56) statt der Coordinaten der Grundebenen der Parameterdarstellung die der Punkte x und y an (vgl. **37**). Wir erhalten dann

$$(\alpha\beta\gamma\delta = \frac{(acxy)(bdxy)}{(adxy)(bcxy)}. \tag{66}$$

Dieses DV soll auch mit $xy(abcd)$ bezeichnet werden.

Liegen $abcd$ in gerader Linie, so wird $xy(abcd)$ von der Lage der Geraden xy unabhängig, was auch unmittelbar aus der Definition des DV von vier Ebenen folgt.

Schneiden wir die Ebenen $\mathfrak{abcd}$ eines Büschels durch eine Ebene in den Strahlen $\alpha\beta\gamma\delta$ eines Strahlenbüschels, letztere durch eine Gerade in den Punkten $abcd$ einer geraden Reihe, so ist nach Obigem

$$(\mathfrak{abcd}) = (abcd),$$

nach **19**

$$(abcd) = (\alpha\beta\gamma\delta),$$

mithin

$$(\alpha\beta\gamma\delta) = (\mathfrak{abcd}).$$

Das DV der vier Strahlen ist also unabhängig von der Lage der Schnittebene. Ist das Strahlenbüschel ein Normalschnitt des Ebenenbüschels, so sind die Winkel ac und $\alpha\gamma$, cb und $\gamma\beta$ u. s. w. gleich, also ist

$$(\alpha\beta\gamma\delta) = \frac{\sin \alpha\gamma}{\sin \gamma\beta} : \frac{\sin \alpha\delta}{\sin \delta\beta},$$

wie aus **19** hervorgeht. *Das DV von vier Ebenen ist sonach das Verhältniss zweier Sinusverhältnisse.* Zugleich erkennt man, dass nach vier Strahlen eines Büschels aus jedem der Büschelebene nicht angehörigen Punkte vier Ebenen von demselben DV gehen. Dieses DV ist gleich dem der vier Strahlen.

39. Es seien p und q zwei feste Strahlen, r ein beweglicher Strahl eines Strahlenbüschels, welches in der Ebene t liegt. Durch pqr legen wir drei Ebenen vwu eines Ebenenbüschels, in welchem wir eine Parameterdarstellung mit den Grundebenen v und w einführen (38). Alsdann ist

$$\varrho' u_i = \lambda_1' v_i + \lambda_2' w_i,$$

nach (35) aber

$$\sigma p_{ik} = v_i t_k - v_k t_i, \quad \tau q_{ik} = w_i t_k - w_k t_i, \quad \omega r_{ik} = u_i t_k - u_k t_i,$$

wo $\varrho' \sigma \tau \omega$ endliche, von Null verschiedene Zahlen bedeuten; es ist mithin

$$\varrho' \omega r_{ik} = \begin{vmatrix} \lambda_1' v_i + \lambda_2' w_i & t_i \\ \lambda_1' v_k + \lambda_2' w_k & t_k \end{vmatrix} = \lambda_1' \sigma p_{ik} + \lambda_2' \tau q_{ik}.$$

Für jede Lage des Strahles r im Strahlenbüschel können wir also drei Zahlen $\varrho \lambda_1 \lambda_2$ derart finden, dass

$$\varrho r_{ik} = \lambda_1 p_{ik} + \lambda_2 q_{ik} \tag{67}$$

wird. Dabei ist ϱ endlich, nicht Null und jedem Strahle des Büschels ein homogenes Werthesystem $\lambda_1 \mid \lambda_2$ zugeordnet; umgekehrt entspricht jedem homogenen Werthesysteme $\lambda_1 \mid \lambda_2$ bei reellem $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ ein Strahl des Büschels, wie man mit Hülfe der Gleichungen (58) und (59) nachweist.

Wir haben in (67) wieder eine Parameterdarstellung im Strahlenbüschel unter zu Grundelegung räumlicher Liniencoordinaten.

Den Werthen ∞, 0, 1 des Parameters entsprechen die Strahlen pqe im Büschel, wo $e_{ik} = p_{ik} + q_{ik}$ gesetzt wurde.

Nun ist nach **38** das DV der Strahlen $klmn$ unseres Büschels mit den Parametern $\varkappa = \frac{\varkappa_1}{\varkappa_2}$, $\lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ u. s. w. gleich dem DV der vier Ebenen mit den Parametern $\frac{\tau}{\sigma}\varkappa$, $\frac{\tau}{\sigma}\lambda$, u. s. w.

im Ebenenbüschel, welches wir zu Hülfe nahmen. Also haben wir nach (65)

$$(68)\qquad (klmn) = \frac{(\varkappa\mu)(\lambda\nu)}{(\varkappa\nu)(\lambda\mu)}.$$

Insbesondere wird

$$(pqer) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \lambda,$$

wenn λ der Parameter des Strahles r bedeutet. Wir können demnach auch $\lambda_1 | \lambda_2$ als *homogene DV-Coordinaten des Strahles* r in einem Systeme mit dem US p, dem NS q und dem ES e (**19**) bezeichnen.

Die Veränderlichen r_{ik} und $\lambda_1 | \lambda_2$ hängen linear zusammen, wie sich aus (67) und der ersten Gleichung in **39** für $\alpha_i = t_i$ ergiebt; somit können wir $\lambda_1 | \lambda_2$ auch als *homogene lineare Coordinaten des Strahles r im Büschel* bezeichnen.

40. Die Punktreihe, das Strahlenbüschel und das Ebenenbüschel werden Grundgebilde erster Stufe oder einförmige Grundgebilde genannt.

Eine Gruppe von beliebig vielen Elementen eines einförmigen Grundgebildes will ich eine einförmige Figur nennen. Dieselbe wird ebenso bezeichnet wie das Grundgebilde, welchem sie angehört. Also heissen z. B. n Strahlen eines Büschels wieder ein Strahlenbüschel u. s. w.

Unter Zugrundelegung räumlicher Coordinaten konnten wir in jedem Grundgebilde erster Stufe lineare Coordinaten einführen (**33**, **38**, **39**), was mit Zuhülfenahme homogener binärer bez. ternärer Coordinaten für die Gerade und das Strahlenbüschel bereits in § 2 und § 3 ausgeführt wurde.

Wir können aber bis jetzt die linearen Coordinaten in **33** nicht als DV-Coordinaten bezeichnen und, während wir früher jedes System reeller oder nicht reeller Werthe der homogenen binären Veränderlichen $\lambda_1 | \lambda_2$ als homogene lineare Coordinaten $\lambda_1 | \lambda_2$ eines Elementes einer Punktreihe bez. eines Büschels gebrauchen konnten (S. 32), ist dieses bei den linearen Coordinaten dieses Paragraphen nicht der Fall. Von diesen Beschränkungen werden wir uns im Folgenden befreien.

§ 6. Erweiterung des Begriffes „Raumelement“.

41. Im letzten Paragraphen konnten wir von einem Punkte der Coordinaten $x_1 | x_2 | x_3 | x_4$, sowie von einer Ebene der Coordinaten $u_1 | u_2 | u_3 | u_4$ nur unter ganz bestimmten Voraussetzungen über die Zahlen x_i und u_i sprechen (**33**, **34**). Diese Beschränkungen beseitigen die beiden folgenden Definitionen:

α. Jedes System reeller, imaginärer oder complexer Werthe der homogenen Veränderlichen $x_1 | x_2 | x_3 | x_4$ soll fortan ein in dem zu Grunde gelegten Coordinatensysteme mit den homogenen Coordinaten $x_1 | x_2 | x_3 | x_4$ behafteter Punkt des Raumes genannt werden.

β. Jedes System reeller, imaginärer oder complexer Werthe der homogenen Veränderlichen $u_1 | u_2 | u_3 | u_4$ soll fortan eine in dem zu Grunde gelegten Coordinatensysteme mit den homogenen Coordinaten $u_1 | u_2 | u_3 | u_4$ behaftete Ebene des Raumes genannt werden.

Diese Definitionen gehen durch Vertauschung der Worte „Punkt“ und „Ebene“ in einander über. Definitionen, ebenso Lehrsätze, dieser Art, pflegt man in der Geometrie des Raumes, wie es soeben geschah, nebeneinander zu stellen.

Wir setzen fest, dass die neu hinzugekommenen Coordinaten mittelst derselben Formeln (53) und (54) transformirt werden, wie die bisher gebrauchten.

Abkürzend werden wir allgemein den Punkt $x_1 | x_2 | x_3 | x_4$ mit x, die Ebene $u_1 | u_2 | u_3 | u_4$ mit u bezeichnen. Unter $x\,y\,z$ verstehen wir Punkte, unter $u\,v\,w$ Ebenen.

Den in Art. **34** für eigentliche Elemente entwickelten Begriff der Incidenz von Punkt und Ebene dehnen wir auch auf die neuen Raumelemente aus, indem wir sagen:

γ. Der Punkt $x_1 | x_2 | x_3 | x_4$ und die Ebene $u_1 | u_2 | u_3 | u_4$ liegen dann und nur dann aneinander, wenn $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4 = 0$ ist.

Der Ausdruck $u_1x_1 +$ u. s. w. ist unabhängig vom Coordinatensysteme, wie aus **34** unmittelbar hervorgeht.

Man kann $u_x = 0$ sowohl die Gleichung der Ebene u in Punktcoordinaten, als die Gleichung des Punktes x in Ebenencoordinaten nennen. Wir sprechen auch kurz von der Ebene bez. dem Punkte $u_x = 0$.

42. Die vollzogenen Begriffserweiterungen gestatten uns, auch die Begriffe „Gerade des Raumes", „Incidenz von Punkt und Gerade", „Incidenz von Gerade und Ebene" zu erweitern. Dieses geschieht gleichzeitig durch folgende Definition.

δ. Wir sagen von den Punkten, welche gleichzeitig an zwei Ebenen u und v liegen und nur von diesen Punkten, dass sie an der Geraden uv liegen oder dass die Gerade uv an diesen Punkten liege, und wir sagen von den Ebenen, welche gleichzeitig an zwei Punkten x und y liegen und nur von diesen Ebenen, dass sie an der Geraden xy liegen oder dass die Gerade xy an diesen Ebenen liege; die Geraden uv und xy betrachten wir als einerlei, wenn $u_x = u_y = v_x = v_y = 0$ ist.

Liegt der Punkt x an der Geraden uv, uv an x, so sagen wir wieder uv und x liegen aneinander; Analoges gilt für Gerade und Ebene.

Eine Gerade im Raume wird analytisch durch zwei Gleichungen $u_x = 0$, $v_x = 0$ bez. $u_x = 0$, $u_y = 0$ dargestellt. Man spricht auch kurz von der Geraden $u_x = 0$, $v_x = 0$ bez. $u_x = 0$, $u_y = 0$.

Die Gerade $u_x = 0$, $v_x = 0$ ist nicht verschieden von der Geraden $\lambda_1 u_x + \lambda_2 v_x = 0$, $\mu_1 u_x + \mu_2 v_x = 0$, wenn $\lambda_1 | \lambda_2$, $\mu_1 | \mu_2$ endliche Zahlen sind und $(\lambda \mu)$ nicht Null ist.

Aus jedem Satze, bei dessen Beweise nur die Definitionen $\alpha - \delta$ (und die noch abzugebenden $\varepsilon - \eta$) benutzt wurden, erhält man einen im Allgemeinen neuen, ebenfalls richtigen Satz, wenn man die Worte „Punkt" und „Ebene" durchweg vertauscht. Denn nimmt man diese Vertauschung in den Definitionen selbst vor, so bleiben sie in ihrer Gesammtheit ungeändert.

Wir werden zunächst aus den Definitionen $\alpha - \delta$ weitere Folgerungen ziehen:

Liegt der Punkt z an der Geraden $uv = xy$, diese Ge-

rade an der Ebene w, so liegt z an w. Es ist nämlich dann $u_x = u_y = u_z = v_x = v_y = v^z = 0$ (γ, δ), die Geraden xy, yz, zx sind mit der Geraden uv identisch (δ), also auch unter sich, w liegt an x, y und z (δ). Also:

1. *Ein Punkt und eine Ebene liegen aneinander, wenn sie an einer und derselben Geraden liegen.*

Liegen die Punkte x und y der Geraden uv an w, so liegt die Gerade $xy = uv$ an w (γ, δ), somit liegt jeder Punkt von uv an w (1). Also:

2. *Liegen zwei Punkte einer Geraden an einer Ebene, so liegt jeder Punkt der Geraden an der Ebene.*

Aus dem Beweise des ersten Satzes geht noch die Richtigkeit des folgenden Satzes hervor:

3. *Die Aussage: „Die Punkte xyz liegen an derselben Geraden (in gerader Linie)" und die Aussage: „Der Punkt z liegt an der Geraden xy oder x an yz oder y an zx" decken sich.*

Durch die oben besprochene Vertauschung erhält man aus 2 und 3 neue Sätze, während 1 in sich selbst übergeht.

Angenommen, die Punkte x und y sowohl als die Ebenen u und v liegen an derselben Geraden. Dann liegen x, y an u, v (Satz 1), also ist $u_x = u_y = v_x = v_y = 0$ (γ). Hieraus folgert man bei gleicher Bezeichnung, wie in **35**, die Gleichung (56). Die Proportion der p_{ik}, ebenso die der π_{ik} ist unabhängig von der Wahl der Punkte x und y oder der Ebenen u und v an der betrachteten Geraden. Man gelangt so zu homogenen Coordinaten einer Geraden des Raumes im Sinne der Definition δ, genau wie man zu solchen Coordinaten einer eigentlichen Geraden in **35** gekommen ist. Wir sind aber jetzt berechtigt, *jedes System reeller oder nicht reeller Werthe der homogenen Veränderlichen $p_{12} | p_{13} | p_{14} | p_{34} | p_{42} | p_{23} |$ eine mit den homogenen Coordinaten $p_{12} | p_{13} | \ldots$ behaftete Gerade des Raumes zu nennen, wenn nur die Zahlen p_{ik} der Gleichung*

$$p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = 0$$

genügen.

Die Gerade der Coordinaten $p_{12} | p_{13} | \ldots$ soll allgemein mit p bezeichnet werden.

43. Ueber die Benennung der Raumelemente — Punkt, Gerade, Ebene — treffen wir folgende Bestimmungen:

Ein Raumelement heisst reell oder imaginär, je nachdem die Verhältnisse seiner homogenen Coordinaten sämmtlich reell sind oder nicht.

Zwei imaginäre Elemente gleicher Art heissen conjugirt imaginär, wenn ihre entsprechenden homogenen Coordinaten conjugirt imaginäre Zahlen sind oder sich in solche verwandeln lassen.

Ist die vierte homogene Coordinate eines Punktes Null, so heisst derselbe ein unendlich ferner Punkt des Raumes. Die vierte homogene Coordinate eines solchen Punktes ist in jedem rechtwinkligen Systeme Null nach (53).

An der Ebene $0|0|0|1$ liegen die unendlich fernen Punkte des Raumes und nur solche Punkte (γ); sie heisst die unendlich ferne Ebene des Raumes und ist dadurch ausgezeichnet, dass sie in jedem rechtwinkligen Systeme dieselben Coordinaten besitzt, wie aus (54) hervorgeht. Eine an ihr liegende, nur unendlich ferne Punkte enthaltende Gerade, wird eine unendlich ferne Gerade des Raumes genannt. Von den homogenen Coordinaten einer solchen Geraden ist die dritte, vierte und fünfte Null in jedem rechtwinkligen Systeme.

Die reellen unendlich fernen Raumelemente werden auch als uneigentliche Elemente bezeichnet, im Gegensatze zu den übrigen reellen, den eigentlichen Elementen.

Es muss gleich hier hervorgehoben werden, dass alle Begriffsbestimmungen und Festsetzungen in § 3 und theilweise diejenigen in § 1 eine Folge solcher dieses Paragraphen sind. Wenn schon es darnach theoretisch richtig erscheint mit den räumlichen Betrachtungen zu beginnen, so ist doch aus didaktischen Gründen der eingeschlagene Gang vorzuziehen, wobei es nur erübrigt, an geeigneter Stelle den Zusammenhang wirklich herzustellen (**46, 51**).

44. Aus den Definitionen α — δ folgert man weiterhin eine Reihe von Sätzen, welche für eigentliche Elemente zum Theile bereits in § 5 aufgeführt wurden und die hier meist kürzer gefasst werden können. Man braucht immer nur einen Satz der folgenden Paare abzuleiten (**42**).

a. *Es giebt eine und nur eine Gerade, welche an zwei Punkten des Raumes liegt.*

b. *Es giebt eine und nur eine Gerade, welche an zwei Ebenen des Raumes liegt.*

Beweis von a: Sind x und y zwei beliebige Punkte des Raumes, so liegt die Gerade xy und nur diese an x und y; denn sind u und v irgend zwei gleichzeitig an x und y liegende Ebenen, so liegt die Gerade $uv = xy$ an x und y (δ).

Die an zwei Punkten x und y liegende Gerade xy wird auch die Verbindungslinie der beiden Punkte, die an zwei Ebenen u und v liegende Gerade uv die Schnittlinie der beiden Ebenen genannt.

Zu a vergl. Satz 1 in **22** und die Schlussbemerkung in **43**.

Zu b vergl. Artikel **35**. Von zwei eigentlichen Ebenen können wir jetzt auch dann, wenn sie parallel sind, sagen, dass sie sich schneiden; ihre Schnittlinie ist eine uneigentliche Gerade des Raumes. Man nennt überhaupt zwei Ebenen — im Sinne der Definition β — parallel, wenn sie sich in einer unendlich fernen Geraden des Raumes schneiden.

Die unendlich fernen Punkte einer jeden von der unendlich fernen Ebene verschiedenen Ebene u liegen in gerader Linie; denn sie liegen an u und der uneigentlichen Ebene (δ).

Dies haben wir für die eigentliche Ebene bereits in **21** ausgesprochen (**43**, **51**).

Die unendlich ferne Gerade der Ebene u hat die Coordinaten $u_3 \,|\, -u_2 \,|\, 0 \,|\, 0 \,|\, 0 \,|\, u_1$.

Jede unendlich ferne Gerade $p_{12} \,|\, p_{13} \,|\, 0 \,|\, 0 \,|\, 0 \,|\, p_{23}$ ist solche gewisser Ebenen, nämlich derjenigen, welche die Coordinaten $p_{23} \,|\, p_{31} \,|\, p_{12} \,|\, u_4$ besitzen, wo u_4 eine endliche, sonst beliebige Zahl bedeutet.

c. *Liegen die Punkte xyz in gerader Linie, so ist*

$$(xyz)_1 = (xyz)_2 = (xyz)_3 = (xyz)_4 = 0$$

und umgekehrt.

d. *Liegen die Ebenen uvw an derselben Geraden, so ist*

$$(uvw)_1 = (uvw)_2 = (uvw)_3 = (uvw)_4 = 0$$

und umgekehrt.

Beweis von d wie in **36**.

e. *Es giebt eine und nur eine Ebene, welche an drei Punkten xyz liegt, welche keiner Geraden angehören; ihre Coordinaten lauten*

$$(xyz)_1 \,|\, (xyz)_2 \,|\, (xyz)_3 \,|\, (xyz)_4.$$

f. *Es giebt einen und nur einen Punkt, welcher an drei Ebenen uvw liegt, welche nicht an einer Geraden liegen; seine Coordinaten lauten*

$$(uvw)_1 \,|\, (uvw)_2 \,|\, (uvw)_3 \,|\, (uvw)_4.$$

Zu e: Aus $u_x = u_y = u_z = 0$ folgt nämlich

$$u_1 : u_2 : u_3 : u_4 = (xyz)_1 : (xyz)_2 : (xyz)_3 : (xyz)_4,$$

wo die $(xyz)_i$ nicht sämmtlich Null sind (c).

Die Ebene $(xyz)_1 | \ldots$ bezeichnen wir wieder mit xyz, den Punkt $(uvw)_1 | \ldots$ mit uvw. Auch sprechen wir wieder von einem Schnittpunkte dreier Ebenen, der Verbindungsebene dreier Punkte.

Parallele Ebencn u und v werden von einer nicht zu ihnen parallelen Ebene w in Geraden uw, vw geschnitten, welche einen unendlich fernen Punkt gemein haben. Zwei eigentliche Gerade, die an demselben unendlich fernen Punkte liegen, sind parallel und umgekehrt (**36**). Man nennt überhaupt zwei Gerade des Raumes — im Sinne der Definition δ — parallel, wenn sie einen unendlich fernen Punkt gemein haben. Vergl. auch Art. **22** und den Schlusssatz in **43**.

g. *Es giebt eine und nur eine Ebene, welche an einer Geraden und einem ihr nicht angehörigen Punkte liegt.*

h. *Es giebt einen und nur einen Punkt, welcher an einer Ebene und einer ihr nicht angehörigen Geraden liegt.*

Zu g: An der Geraden $uv = zt$ und dem Punkte y, nicht an uv, liegt die Ebene yzt und nur diese (e, δ); ihre Glei-Gleichung lautet $(xyzt) = 0$ in Punktcoordinaten x_i oder wegen (56) analog **37**

$$u_x v_y - u_y v_x = 0. \tag{69}$$

Es ist dies zugleich die Gleichung des Punktes, welchen die Gerade xy mit der Ebene v gemein hat, in Ebenencoordinaten u_i; er heisst der Schnittpunkt der Geraden xy und der Ebene v. Auch nennen wir wieder yzt die Verbindungsebene des Punktes y mit der Geraden zt.

Eine eigentliche Gerade schneidet eine zu ihr parallele eigentliche Ebene in einem uneigentlichen Punkte (**36**). Wir nennen überhaupt eine Gerade und eine Ebene — im Sinne der Definitionen β und δ — parallel, wenn sie einen unendlich fernen Punkt gemein haben.

i. *Vier Punkte* $abcd$ *liegen dann und nur dann in einer Ebene, wenn* $(abcd) = 0$ *ist.*

k. *Vier Ebenen* $uvwt$ *gehen dann und nur dann durch denselben Punkt, wenn* $(uvwt) = 0$ *ist.*

Folgt aus Def. $\alpha - \gamma$. Vergl. **34** und **36**.

l. *Liegen zwei Gerade des Raumes an demselben Punkte, so giebt es eine und nur eine Ebene, welche an den beiden Geraden liegt.*

m. *Liegen zwei Gerade des Raumes an derselben Ebene, so giebt es einen und nur einen Punkt, welcher an den beiden Geraden liegt.*

Zu l: Liegen p und q an x, so wähle man einen Punkt y an p, z an q aus. Die Ebene xyz und nur diese liegt dann sowohl an p als auch an q (δ, e).

Von den Sätzen l und m ist jeder die Umkehrung des anderen.

Zu m vergl. Satz 2 in **22**. Wir sprechen wieder von dem Schnittpunkte zweier Geraden einer Ebene.

Der Schnittpunkt paralleler Geraden ist ein unendlich ferner Punkt. (Siehe oben unter e, f). Schneiden sich zwei Gerade des Raumes, so will ich auch sagen, dass sie aneinander liegen.

n. *Zwei Gerade* p *und* q *liegen dann und nur dann aneinander, wenn*

$$p_{12}q_{34} + p_{13}q_{42} + p_{14}q_{23} + p_{34}q_{12} + p_{42}q_{13} + p_{23}q_{14} = 0$$

ist.

Denn ist $p = xy$, $q = zt$ und p trifft q, so ist $(xyzt) = 0$ (1, i), also $p_{12}q_{34} + \cdots = 0$ und umgekehrt.

Die Schnittlinie der Ebene uv trifft die Verbindungslinie der Punkte xy, wenn

$$u_x v_y - u_y v_x = 0$$

ist und umgekehrt. Siehe Gl. (69). Hierdurch ist Satz n ebenfalls bewiesen.

Zu n vergl. die Ausführungen in **35** und **36**. Bei $p_{14} : p_{24} : p_{34} = q_{14} : q_{24} : q_{34}$ wird der Schnittpunkt von p und q ein unendlich ferner Punkt, p und q sind parallel und umgekehrt.

An der Geraden $p = xy$ liegt *ein* unendlich ferner Punkt, der Schnittpunkt von p mit der Ebene $0 | 0 | 0 | 1$ (h); seine Gleichung lautet nach (69)

$$u_x y_4 - u_y x_4 = 0$$

in Ebenencoordinaten u_i. Er hat mithin die Coordinaten $x_1 y_4 - x_4 y_1 | x_2 y_4 - x_4 y_2 | x_3 y_4 - x_4 y_3 | 0$ oder $p_{14} | p_{24} | p_{34} | 0$, woraus die Richtigkeit des vorstehend Gesagten auch hervorgeht.

Jeder unendlich ferne Punkt $a_1 | a_2 | a_3 | 0$ ist solcher gewisser Geraden, nämlich der Geraden $p_{12} | p_{13} | a_1 | a_3 | -a_2 | p_{23}$.

Bereits in **6** und **22** haben wir von dem unendlich fernen Punkte einer Geraden gesprochen (**46**).

45. Die Begriffe „Punktreihe“, „Strahlenbüschel“, „Ebenenbüschel“ definiren wir für beliebige Elemente — im Sinne der Definitionen α, β, δ —, wie früher für eigentliche und behalten die eingeführten Bezeichnungen bei. Die Gesammtheit der an einer Geraden liegenden Punkte heisst also wieder eine gerade Punktreihe, die Gerade ihr Träger u. s. w. Auch das zu Anfange des Artikels **40** Gesagte wird auf beliebige Elemente ausgedehnt.

Dagegen können wir von einer Erweiterung der Begriffe „Strecke“, „Theilverhältniss“, „Winkel“ u. s. w. hier absehen, da dieselben im Folgenden nicht in Betracht kommen. Es möge nur auf das Vorgehen in § 1 hingewiesen werden.

Wir haben hier nur das DV von vier Elementen im erweiterten Sinne einzuführen und zwar benutzen wir die Gleichungen (63) und (66), um zunächst das DV von vier Punkten und vier Ebenen zu definiren:

ε. Unter dem DV von vier Punkten, in welchen eine Gerade uv von vier Ebenen $\alpha\beta\gamma\delta$ geschnitten wird, verstehen wir den Ausdruck

$$\frac{(uv\alpha\gamma)(uv\beta\delta)}{(uv\alpha\delta)(uv\beta\gamma)}.$$

ζ. Unter dem DV von vier Ebenen, welche durch eine Gerade xy nach vier Punkten $abcd$ gehen, verstehen wir den Ausdruck

$$\frac{(xyac)(xybd)}{(xyad)(xybc)}.$$

Diese DVe werden bezeichnet wie früher; sie sind unabhängig vom zufällig gewählten rechtwinkligen Coordinatensysteme. Denn haben $u\,v\,\alpha\,\ldots$ in einem anderen Systeme die Coordinaten $u_1' \mid u_2' \mid \ldots,\ v_1' \mid v_2' \mid \ldots,\ \alpha_1' \mid \alpha_2' \mid \ldots,$ so ist nach (54)

$$(u'v'\alpha'\gamma') = \triangle(uv\alpha\gamma), \quad (u'v'\beta'\delta') = \triangle(uv\beta\delta)$$

u. s. w., somit

$$\frac{(u'v'\alpha'\gamma')(u'v'\beta'\delta')}{(u'v'\alpha'\delta')(u'v'\beta'\gamma')} = \frac{(uv\alpha\gamma)(uv\beta\delta)}{(uv\alpha\delta)(uv\beta\gamma)}.$$

Analog beweist man das vom zweiten Ausdrucke Gesagte mittelst (53).

Wir nehmen jetzt an, die Ebenen $\alpha\beta\gamma\delta$ seien die Ebenen xya, xyb, xyc, xyd, also $\alpha_i = (xya)_i$, $\beta_i = (xyb)_i$ u. s. w. (e). Dann wird

$$-(uv\alpha\gamma) = \Sigma\gamma_i(uv\alpha)_i = \Sigma(xyc)_i(uv\alpha)_i$$

$$= \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_c \\ v_x & v_y & v_c \\ \alpha_x & \alpha_y & \alpha_c \end{vmatrix},$$

oder da $\alpha_x = \alpha_y = 0$, $\alpha_c = (cxya)$ u. s. w.,

$$(uv\alpha\gamma) = (u_x v_y - u_y v_x)(xyac),$$

analog

$$(uv\beta\delta) = (u_x v_y - u_y v_x)(xybd)$$

u. s. w., schliesslich

$$\frac{(uv\alpha\gamma)(uv\beta\delta)}{(uv\alpha\delta)(uv\beta\gamma)} = \frac{(xyac)(xybd)}{(xyad)(xybc)},$$

wenn vorausgesetzt wird, dass die Geraden uv und xy nicht aneinander liegen, also $u_x v_y - u_y v_x$ nicht Null ist (44).

Wir haben somit wegen Definition ε und ζ den Satz links:

o. *Vier Ebenen eines Büschels werden von jeder Geraden, welche nicht an der Axe des Büschels liegt, nach demselben DV geschnitten und zwar ist dieses DV gleich dem der vier Ebenen.*

p. *Nach vier Punkten einer geraden Punktreihe gehen aus jeder Geraden, welche nicht an dem Träger der Punktreihe liegt, vier Ebenen von demselben DV und zwar ist dieses DV gleich dem der vier Punkte.*

Vergl. Artikel 38 zu diesen Sätzen.

Weiter ergiebt sich, dass 1) vier Strahlen eines Büschels von jeder Ebene (und somit auch von jeder Geraden seiner Ebene), welche nicht am Scheitel des Büschels liegt, nach demselben DV geschnitten werden. Denn legen wir durch die vier Strahlen vier Ebenen eines Büschels, so ist das genannte DV gleich dem der vier Ebenen (*o*), also constant.

Zugleich ergiebt sich, dass 2) nach vier Strahlen eines Büschels aus jedem der Büschelebene nicht angehörigen Punkte vier Ebenen von demselben DV gehen.

Hierauf gründen wir die Definition des DV von vier Geraden (Strahlen) im Sinne der Definition δ:

η. Das feste DV der vier Punkte, in welchen vier Strahlen eines Büschels von den Ebenen des Raumes geschnitten werden und der vier Ebenen, welche die vier Strahlen mit einem Punkte des Raumes verbinden, heisst das DV der vier Strahlen.

Die Bezeichnung wählen wir wie früher bei eigentlichen Elementen.

Das oben unter 1) Ausgesprochene stimmt, wenn man die planimetrische Fassung wählt, in Folge der Definition η mit dem Inhalte des Satzes 5 in **24** überein. Das unter 2) Gesagte (η) wurde in **38** für eigentliche Elemente als richtig erkannt.

Man folgert weiter aus η die Sätze:

q. *Vier Ebenen eines Büschels werden von jeder nicht an der Axe desselben liegenden Ebene in vier Strahlen von demselben DV geschnitten. Dieses DV ist gleich dem der vier Ebenen.*	r. *Nach vier Punkten einer geraden Punktreihe gehen aus jedem nicht an ihrem Träger liegenden Punkte vier Strahlen von demselben DV. Dieses DV ist gleich dem der vier Punkte.*

Vergl. **38**. Satz r schliesst den ebenen Satz 6 in **24** in sich (**43, 51**).

Sind *abcd* vier Elemente eines einförmigen Grundgebildes, so sagen wir, *dass die Elemente ab durch die Elemente cd getrennt werden oder nicht, je nachdem das DV (abcd) negativ oder positiv ist.* Bei $(abcd) = -1$ spricht man von harmonischer Trennung u. s. w., wie bei eigentlichen Elementen (§ 1).

46. Sind a und b zwei Punkte einer Geraden (einer Punktreihe), so lässt sich jeder andere Punkt derselben in der Form $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 b_1 \,|\, \lambda_1 a_2 + \lambda_2 b_2 \,|\, \lambda_1 a_3 + \lambda_2 b_3 \,|\, \lambda_1 a_4 + \lambda_2 b_4$ vermittelst des Parameters $\lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ darstellen (wegen Satz c in **44**; vergl. **33** und **38**).

Vier Punkte $klmn$ der Geraden ab mit den Parametern $\varkappa = \frac{\varkappa_1}{\varkappa_2}$, $\lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$, $\mu = \frac{\mu_1}{\mu_2}$, $\nu = \frac{\nu_1}{\nu_2}$ haben das DV $\frac{(\varkappa\mu)(\lambda\nu)}{(\varkappa\nu)(\lambda\mu)}$. Denn liegt die Gerade xy nicht an der Geraden ab, so ist

$$xy(klmn) = (klmn)$$

nach p. Nach ζ hat man aber

$$xy(klmn) = \frac{(xy\,km)(xy\,ln)}{(xy\,kn)(xy\,lm)}.$$

Führt man rechts die Parameter der Punkte $klmn$ ein, so wird z. B.

$$(xykm) = (xyab)(\varkappa\mu)$$

u. s. w., schliesslich

$$(klmn) = \frac{(\varkappa\mu)(\lambda\nu)}{(\varkappa\nu)(\lambda\mu)}. \tag{70}$$

Zu den Werthen ∞, 0, 1 des Parameters λ gehören die Punkte a, b, $e = a_1 + b_1 \,|\, \cdots$.

Bedeutet λ den Parameter von l, so ist nach (70)

$$(abel) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \lambda.$$

Der Parameter λ bei obiger Darstellung ist also wieder DV-Coordinate des Punktes l in einem Systeme mit den Grundpunkten a und b und dem EP e.

Die Parameterdarstellung in den übrigen einförmigen Grundgebilden gestaltet sich ganz so, wie früher bei Benutzung eigentlicher Elemente. Die Formeln (65) und (68) gelten auch hier. Das DV von vier Elementen ist nur abhängig von den linearen Coordinaten seiner Elemente, nicht von den das lineare System bestimmenden Daten.

Wir sind jetzt im Stande unter zu Grundelegung eines räumlichen Coordinatensystems in jedem einförmigen Grundgebilde — im erweiterten Sinne — homogene (binäre) lineare oder DV-Coordinaten einzuführen. Dabei können wir zu

Grundelementen und zum Einheitselemente drei beliebige Elemente des betreffenden Grundgebildes wählen (24). Wir sind ferner berechtigt, von einem Elemente der Coordinaten $\lambda_1 | \lambda_2$ in dem so eingeführten Coordinatensysteme zu sprechen, wenn $\lambda_1 | \lambda_2$ ein beliebiges System *reeller oder nicht reeller* Werthe von homogenen binären Veränderlichen bedeutet. *Alle am Schlusse von* **40** *gemachten Beschränkungen sind sonach jetzt aufgehoben.*

Man stellt schliesslich den Zusammenhang zwischen den Definitionen und Bestimmungen dieses Paragraphen und solchen der beiden ersten Paragraphen vermittelst Gl. (50) her. In welcher Weise man dabei vorzugehen hat, ersieht man aus Art. 25.

§ 7. Die Grundgebilde zweiter Stufe.

47. Die Gesammtheit der an einer Ebene v liegenden Punkte und Geraden heisst ein ebenes System, v der Träger desselben.

Unter zu Grundelegung homogener (ternärer) rechtwinkliger Coordinaten haben wir das ebene System mit eigentlichem Träger in § 3 und § 4 untersucht.

Eine Gruppe von beliebig vielen Punkten und Geraden eines ebenen Systems (einer Ebene) heisst wieder eine ebene Figur (Planfigur) u. s. w., wie in **26** bei eigentlichen Elementen.

Die Gesammtheit der an einem Punkte y des Raumes liegenden Geraden und Ebenen heisst ein Bündel oder ein centrisches System, y der Träger, Mittelpunkt oder das Centrum desselben.

Eine Gruppe von beliebig vielen Geraden (Strahlen) und Ebenen eines Bündels heisst eine centrische Figur.

Im Bündel heisst die Gesammtheit aller Strahlen ein Strahlenbündel, die aller Ebenen ein Ebenenbündel.

Eine Gruppe von n Strahlen eines Bündels, die keinem Büschel angehören, heisst ein n-Kant im Bündel, eine Gruppe von n Ebenen, die keinem Büschel angehören, ein n-Flach im Bündel.

Figuren in demselben Bündel heissen concentrisch.

Das Strahlen- und Ebenenbündel sind besondere centrische

Figuren, desgleichen das Ebenen- und Strahlenbüschel; letzteres ist zugleich eine Planfigur. Die Punktreihe ist eine besondere Planfigur.

Das ebene System und das Bündel werden als Grundgebilde zweiter Stufe bezeichnet.

48. Sind $a\,b\,c$ drei feste Punkte eines ebenen Systems mit dem Träger v (der Ebene v), die nicht in gerader Linie liegen, x ein beweglicher Punkt der Ebene v, so kann man Zahlen ϱ, $\xi_1 \mid \xi_2 \mid \xi_3$ stets so bestimmen, dass

(71) $$\varrho x_i = \xi_1 a_i + \xi_2 b_i + \xi_3 c_i \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

wird. Denn liegt y nicht an v, so folgt aus der Identität

$$u_a(bcxy) - u_b(acxy) + u_c(abxy) - u_x(abcy) + u_y(abcx) = 0,$$

wegen $(abcx) = 0$ (Satz c in 44),

(72) $$(abcy)x_i = (bcxy)a_i + (caxy)b_i + (abxy)c_i.$$

Man erkennt, dass ϱ endlich und von Null verschieden ist, dass ferner die Proportion der Veränderlichen $\xi_1 \mid \xi_2 \mid \xi_3$ bei gegebenem x bestimmt ist; $\xi_1 \mid \xi_2 \mid \xi_3$ sind homogene Veränderliche oder Parameter (4). Jedem Werthesysteme der homogenen Veränderlichen ξ_i entspricht vermöge (71) ein Punkt der Ebene v.

Wir sind so zu einer Parameterdarstellung (71) der Punkte einer Ebene gelangt.

Die Veränderlichen x_i sind linear abhängig von den Veränderlichen x_i und umgekehrt, weshalb wir $\xi_1 \mid \xi_2 \mid \xi_3$ auch als homogene (ternäre) lineare Punktcoordinaten in der Ebene v bezeichnen.

Von dem Punkte $x = \xi_1 \mid \xi_2 \mid \xi_3$ gehen nach den Punkten

$k = \varkappa_1 \mid \varkappa_2 \mid \varkappa_3$, $l = \lambda_1 \mid \lambda_2 \mid \lambda_3$, $m = \mu_1 \mid \mu_2 \mid \mu_3$, $n = \nu_1 \mid \nu_2 \mid \nu_3$

vier Strahlen, deren DV

$$x(klmn) = xy(klmn)$$

ist (45). Nach Definition ζ in § 6 ist somit

$$x(klmn) = \frac{(xy\,km)\,(xy\,ln)}{(xy\,kn)\,(xy\,lm)}.$$

Mit Rücksicht auf (71) wird nun z. B.

$$(\varkappa\mu\xi)(abcy) = \begin{vmatrix} \varkappa_1 & \varkappa_2 & \varkappa_3 & 0 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & 0 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & y_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & y_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & y_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & y_4 \end{vmatrix} = C(kmxy),$$

wo C eine endliche, von Null verschiedene Zahl bedeutet; analog wird

$$(\lambda\nu\xi)(abcy) = C'(lnxy)$$

u. s. w., schliesslich

$$x(klmn) = \frac{(\varkappa\mu\xi)(\lambda\nu\xi)}{(\varkappa\nu\xi)(\lambda\mu\xi)}. \tag{73}$$

Aus dem Punkte $a = 1|0|0$ gehen nach den Punkten $b = 0|1|0$, $c = 0|0|1$, $e = 1|1|1$, $x = \xi_1|\xi_2|\xi_3$ vier Strahlen vom DV $\frac{\xi_2}{\xi_3}$, wie sich aus (73) ergiebt; ferner findet man $b(caex) = \frac{\xi_3}{\xi_1}$, $c(abex) = \frac{\xi_1}{\xi_2}$.

Wir bezeichnen deshalb $\xi_1|\xi_2|\xi_3$ auch als **homogene DV-Coordinaten des Punktes** x **der Ebene** v in einem Systeme mit den Grundpunkten abc und dem EP e (28).

Vier Punkte $abce$ der Ebene, von denen keine drei in gerader Linie liegen, bestimmen ein System von DV-Coordinaten in der Ebene, welches abc zu Grundpunkten, e zum EP hat. Der Beweis ist analog demjenigen in 24 bei DV-Coordinaten in der Geraden.

Aus Vorstehendem ergiebt sich unmittelbar (42):

Sind $\alpha\beta\gamma$ drei feste Ebenen eines Bündels y, die keinem Ebenenbüschel angehören, so hat man für die Coordinaten einer beweglichen Ebene u des Bündels die **Parameterdarstellung**

$$\varrho u_i = \pi_1\alpha_i + \pi_2\beta_i + \pi_3\gamma_i \quad (i = 1, 2, 3, 4). \tag{74}$$

Es sind $\pi_1|\pi_2|\pi_3$ **homogene (ternäre) lineare DV-Coordinaten der Ebene** u **des Bündels.**

Bezeichnen wir das DV der Strahlen, in welchen die Ebene $u = \pi_1|\pi_2|\pi_3$ die Ebenen $k = \varkappa_1|\varkappa_2|\varkappa_3$, $l = \lambda_1|\ldots$, $m = \mu_1|\ldots$, $n = \nu_1|\ldots$ schneidet, mit $u(klmn)$, so wird

$$u(klmn) = \frac{(\varkappa\mu\pi)(\lambda\nu\pi)}{(\varkappa\nu\pi)(\lambda\mu\pi)}. \tag{75}$$

Setzen wir $\varepsilon_i = \alpha_i + \beta_i + \gamma_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$, so haben wir die Gleichungen

$$\alpha(\beta\gamma\varepsilon u) = \frac{\pi_2}{\pi_3}, \quad \beta(\gamma\alpha\varepsilon u) = \frac{\pi_3}{\pi_1}, \quad \gamma(\alpha\beta\varepsilon u) = \frac{\pi_1}{\pi_2}.$$

Auf Grund dessen nennt man $\pi_1 | \pi_2 | \pi_3$ auch **homogene (ternäre) DV-Coordinaten der Ebene** u; α heisst die **erste**, β die **zweite**, γ die **dritte Grund- oder Fundamentalebene**, ε die **EE** des Systems von DV-Coordinaten im Bündel. U. s. w.

49. Wir ziehen jetzt gleichzeitig ein ebenes System v und ein centrisches System y in Betracht, deren Träger nicht aneinanderliegen. Im ersteren führen wir die Parameterdarstellung (71), im letzteren die Parameterdarstellung (74) ein alle Bezeichnungen beibehaltend.

Für die Gerade $\pi = uv$ der Ebene v wird wegen (74)

$$\varrho\pi_{ik} = u_i v_k - u_k v_i = \begin{vmatrix} \pi_1\alpha_i + \pi_2\beta_i + \pi_3\gamma_i & v_i \\ \pi_1\alpha_k + \pi_2\beta_k + \pi_3\gamma_k & v_k \end{vmatrix}$$

oder, wenn die Geraden αv, βv, γv mit $\mathfrak{a}\ \mathfrak{b}\ \mathfrak{c}$ bezeichnet werden, da $\mathfrak{a}_{ik} = \alpha_i v_k - \alpha_k v_i$ u. s. w.,

$$\varrho\pi_{ik} = \pi_1\mathfrak{a}_{ik} + \pi_2\mathfrak{b}_{ik} + \pi_3\mathfrak{c}_{ik}. \tag{76}$$

Dabei ist nach (72)

$$\pi_1 = (\beta\gamma u v), \quad \pi_2 = (\gamma\alpha u v), \quad \pi_3 = (\alpha\beta u v).$$

Also: Sind $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}$ drei feste Gerade einer Ebene v, die keinem Büschel angehören, π eine bewegliche Gerade in v, so kann man die Coordinaten von π immer in der Form (76) durch diejenigen von $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}$ ausdrücken. Umgekehrt entspricht jedem Werthesysteme $\pi_1 | \pi_2 | \pi_3$ vermöge (76) eine Gerade der Ebene v. Denn es ist bei allen π_i die Gleichung (58) erfüllt und die Gerade $\pi = \pi_{34} | \ldots$ schneidet stets die Geraden $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ (Satz n in **44**), liegt also an v.

Wir haben in (76) eine *Parameterdarstellung der Geraden einer Ebene* unter Zugrundelegung räumlicher Liniencoordinaten vor uns. Die Veränderlichen π_{ik} und π_i hängen linear zusammen, weshalb $\pi_1 | \pi_2 | \pi_3$ als *homogene (ternäre) lineare Liniencoordinaten in der Ebene* bezeichnet werden.

Besitzt bei der Darstellung (76) die Gerade k die Parameter $\varkappa_1 | \varkappa_2 | \varkappa_3$, l die Parameter $\lambda_1 | \lambda_2 | \lambda_3$ u. s. w., so ist nach Def. η und Gl. (75)

$$\pi(klmn) = \frac{(\varkappa\mu\pi)(\lambda\nu\pi)}{(\varkappa\nu\pi)(\lambda\mu\pi)}. \tag{77}$$

Bezeichnen wir die Gerade der Parameter $1 | 1 | 1$ mit $\mathfrak{e}$, so ist nach (77)

$$\mathfrak{a}(\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{e}\pi) = \frac{\pi_2}{\pi_3}, \quad \mathfrak{b}(\mathfrak{c}\mathfrak{a}\mathfrak{e}\pi) = \frac{\pi_3}{\pi_1}, \quad \mathfrak{c}(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{e}\pi) = \frac{\pi_1}{\pi_2}.$$

Wir können deshalb $\pi_1 | \pi_2 | \pi_3$ auch als **homogene (ternäre) DV-Coordinaten der Geraden π der Ebene v** bezeichnen in einem Systeme mit den Fundamentallinien $\mathfrak{a}$ $\mathfrak{b}$ $\mathfrak{c}$ und der EL $\mathfrak{e}$ (**29**).

50. Führen wir in der Ebene v gleichzeitig homogene lineare *Punkt- und Liniencoordinaten* durch (71) und (76) ein, so wählen wir die Grund- und Einheitselemente *stets* so, dass die Bedingung für die Incidenz des Punktes $x = \xi_1 | \xi_2 | \xi_3$ und der Geraden $\pi = \pi_1 | \pi_2 | \pi_3$ die Form $\pi_1 \xi_1 + \pi_2 \xi_2 + \pi_3 \xi_3 = 0$ annimmt, was immer möglich ist. Denn nach Def. γ liegt der Punkt x von v an der Ebene u des Bündels y, mithin auch an der Geraden $uv = \pi$ der Ebene v (Def. δ), wenn $u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0$ ist, also bei

$$\pi_1\xi_1 a_\alpha + \pi_1\xi_2 a_\beta + \pi_1\xi_3 a_\gamma + \pi_2\xi_1 b_\alpha + \pi_2\xi_2 b_\beta + \pi_2\xi_3 b_\gamma \\ + \pi_3\xi_1 c_\alpha + \pi_3\xi_2 c_\beta + \pi_3\xi_3 c_\gamma = 0,$$

wo $a_\alpha = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3$ u. s. w., nach (71) und (74).

Demnach haben wir, um das Gewünschte zu erreichen, $\alpha_i = (bcy)_i$, $\beta_i = (cay)_i$, $\gamma_i = (aby)_i$ zu nehmen, können also die drei Grundpunkte $a b c$ und den EP e willkürlich wählen, müssen aber dann $\mathfrak{a} = bc$, $\mathfrak{b} = ca$, $\mathfrak{c} = ab$ und eine bestimmte EL $\mathfrak{e}$ annehmen. Also:

In einer Ebene v — im Sinne der Def. β — können wir homogene lineare Coordinaten einführen und dann jedes homogene ternäre Werthesystem $\xi_1 | \xi_2 | \xi_3$ als Punkt, $\pi_1 | \pi_2 | \pi_3$ als Gerade bezeichnen; die Incidenz dieser Elemente ist durch die Gleichung $\pi_1 \xi_1 + \pi_2 \xi_2 + \pi_3 \xi_3 = 0$ bedingt und das DV von vier Punkten oder Geraden durch (77) bez. (73) gegeben (vergl. Art. **30** und die Schlussbem. in Art. **43**).

Die Sätze 1—4 in § 3 gelten in einer beliebigen Ebene, in welcher homogene DV-Coordinaten eingeführt wurden, überhaupt alle analytischen Entwicklungen, die sich auf die Definitionen in § 3 stützen, z. B. die Parameterdarstellung in einer Geraden der Ebene v, ferner die Ausführungen in **26** und **27**. Die dort eingeführten Ausdrücke behalten wir bei.

Nach Gl. (40) hat der Punkt $e = 1|1|1$ die Polare $1|1|1 = \mathfrak{e}$ in Bezug auf das Dreieck abc:

Der EP und die EL stehen also in der Beziehung von Pol und Polare in Bezug auf das Fundamentaldreieck (Fundamentaldreiseit).

Durch Vertauschung der Worte „Punkt" und „Ebene" folgt aus **49**:

Im Bündel gilt die Parameterdarstellung (76) der Coordinaten eines beweglichen Strahles π durch diejenigen von drei festen Strahlen $\mathfrak{a}\ \mathfrak{b}\ \mathfrak{c}$, welche keinem Büschel angehören; die homogenen Parameter $\pi_1|\pi_2|\pi_3$ von π können homogene lineare Linien (Strahlen)-Coordinaten im Bündel genannt werden.

Bezeichnen wir allgemein die an den Strahlen π und k des Bündels liegende Ebene mit πk, das DV der vier Ebenen πk, πl, πm, πn mit $\pi(klmn)$, so ist

$$\pi(klmn) = \frac{(\varkappa\mu\pi)(\lambda\nu\pi)}{(\varkappa\nu\pi)(\lambda\mu\pi)}, \tag{78}$$

wenn $\varkappa_1|\varkappa_2|\varkappa_3$ die Parameter von k u. s. w.

Nach (78) ist, wenn $\mathfrak{e}_{ik} = \mathfrak{a}_{ik} + \mathfrak{b}_{ik} + \mathfrak{c}_{ik}$,

$$\mathfrak{a}(\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{e}\pi) = \frac{\pi_2}{\pi_3}, \quad \mathfrak{b}(\mathfrak{c}\mathfrak{a}\mathfrak{e}\pi) = \frac{\pi_3}{\pi_1}, \quad \mathfrak{c}(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{e}\pi) = \frac{\pi_1}{\pi_2}.$$

Wir bezeichnen daher $\pi_1|\pi_2|\pi_3$ auch als homogene DV-Coordinaten des Strahles π im Bündel; $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ heissen bez. der erste, zweite, dritte Grundstrahl, $\mathfrak{e}$ der ES des Systems von DV-Coordinaten.

Aus dem im Eingange dieses Artikels Entwickelten folgt weiter durch die gleiche Vertauschung:

Führt man in einem Bündel *gleichzeitig* homogene (ternäre) Ebenen- und Strahlencoordinaten der eben beschriebenen Art ein, so wählt man die Fundamental- und Einheits-

elemente *stets* so, dass die Incidenz der Ebene $\pi_1 | \pi_2 | \pi_3$ und des Strahles $\xi_1 | \xi_2 | \xi_3$ durch das Verschwinden von $\pi_1 \xi_1 + \pi_2 \xi_2 + \pi_3 \xi_3$ bedingt ist.

Zu dem Ende nimmt man $\mathfrak{a} = \beta\gamma$, $\mathfrak{b} = \gamma\alpha$, $\mathfrak{c} = \alpha\beta$ und wählt die Einheitselemente so, dass sie in der Beziehung von Polargerade und Polarebene in Bezug auf das Dreikant $\mathfrak{abc}$ (das Dreiflach $\alpha\beta\gamma$) stehen. Die geometrischen Eigenschaften von Polargerade und Polarebene erkennt man aus **27**.

Man kann die Gleichung $\pi\xi = 0$ einerseits als die Gleichung der Ebene π in Strahlencoordinaten $\xi_1 | \xi_2 | \xi_3$, andererseits als die Gleichung des Strahles ξ in Ebenencoordinaten $\pi_1 | \pi_2 | \pi_3$ auffassen.

51. Wir führen jetzt, um den *Zusammenhang der Betrachtungen in § 3 und § 6*, auf welchen öfters hingewiesen wurde, wirklich herzustellen, in einer eigentlichen Ebene homogene ternäre Coordinaten der vorhin beschriebenen Art ein und wählen dabei die Bestimmungselemente so, wie es in **31** geschehen ist. Man erkennt dann, genau wie a. a. O., dass unsere lineare Coordinaten in rechtwinklige ebene Coordinaten übergehen. In (71) wird $b_4 = c_4 = 0$, in (76) $\mathfrak{c}_{12} = \mathfrak{c}_{23} = \mathfrak{c}_{31} = 0$. Vermittelst dieser Formeln legen wir jedem Elemente unserer Ebene — in erweitertem Sinne — homogene rechtwinklige Coordinaten bei.

Wir können dann von einem Punkte der Coordinaten $\xi_1 | \xi_2 | \xi_3$ und einer Geraden der Coordinaten $\pi_1 | \pi_2 | \pi_3$ sprechen, wenn $\xi_1 | \xi_2 | \xi_3$ und $\pi_1 | \pi_2 | \pi_3$ beliebige Systeme von reellen oder nicht reellen homogenen ternären Veränderlichen bedeuten (vergl. Def. I und II in § 3).

Die Elemente ξ und π liegen aneinander, wenn $\pi\xi = 0$ ist. (Vergl. Def. III).

Für einen reellen Punkt unserer Ebene werden die Verhältnisse seiner homogenen rechtwinkligen Coordinaten sämmtlich reell, für einen imaginären nicht sämmtlich reell. Dasselbe gilt für eine Gerade unserer Ebene. Ein unendlich ferner Punkt unserer Ebene hat als vierte homogene Coordinate Null, mithin wird für ihn in (71) wegen $b_4 = c_4 = 0$, $\xi_3 = 0$.

Von den räumlichen Coordinaten der unendlich fernen

Geraden unserer Ebene sind die drei vorletzten Null (43), wir haben also für diese Gerade in (76) $\pi_{23} = \pi_{12} = \pi_{13} = 0$ zu nehmen, so dass wegen $c_{12} = c_{23} = c_{31}$ gleichzeitig π_1 und π_2 verschwinden.

Das DV von vier Punkten oder Geraden ist endlich durch die Formeln (77) und (73) gegeben (vergl. Def. IV u. V).

Die Definitionen und Bestimmungen in § 3 sind also in der That eine Folge solcher des § 6.

§ 8. Graphische Eigenschaften der Figuren.

52. Die Gesammtheit der Raumelemente nennt man das räumliche System. Dasselbe wird als Grundgebilde dritter Stufe bezeichnet.

Eine Gruppe von beliebig vielen Elementen des räumlichen Systems (des Raumes) heisst eine Figur.

Von besonderen Figuren sind schon solche aufgetreten, welche sich aus Elementen desselben Grundgebildes erster oder zweiter Stufe zusammensetzen: Punktreihe, Büschel, Bündel, ebene und centrische Figuren.

Eine aus n Punkten bestehende, nicht ebene Figur heisst ein räumliches n-Eck. Eine aus n Ebenen bestehende, nicht centrische Figur wird ein räumliches n-Flach genannt.

Das räumliche Viereck heisst auch Tetraeder, den gleichen Namen führt das räumliche Vierflach. Die Geraden ab, ac, ... heissen die Kanten, die Ebenen abc, bcd ... die Seitenebenen des Tetraeders $abcd$.

Die Elemente, aus denen eine Figur besteht, sind entweder direkt gegeben oder es sind eine oder mehrere homogene Gleichungen vorgelegt, denen ihre homogenen Coordinaten zu genügen haben. So ist z. B. durch die Gleichung $u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0$ bei veränderlichen u_i ein Ebenenbündel mit dem Centrum x gegeben. —

In Folge der Definitionen α — η in § 6 gelangen wir zu Sätzen über Figuren, zu geometrischen Sätzen.

Die durch jene Definitionen eingeführten geometrischen Begriffe heissen auf die Lage bezügliche oder auch gra-

phische (descriptive) Begriffe; ebenso werden alle Begriffe genannt, welche mittelst graphischer Begriffe allein definirt werden können, wie z. B. Figur, Trennung.

Diejenigen Eigenschaften einer Figur, zu deren Beschreibung *nur* graphische Begriffe nöthig sind, heissen graphische Eigenschaften der Figur. Wenn z. B. das Punktepaar ab durch das Punktepaar cd harmonisch getrennt wird, so ist dieses eine graphische Eigenschaft der Punktreihe $abcd$.

Solche geometrische Lehrsätze, welche nur Aussagen über die graphischen Eigenschaften der Figuren machen, heissen graphische Sätze. Die Sätze a—r in § 6 sind z. B. graphische Sätze. Aus graphischen Sätzen allein hergeleitete Sätze sind ebenfalls graphische Sätze.

Sowie die Lehre von den Eigenschaften der eigentlichen Figuren, so wird auch die Lehre von den Eigenschaften der Figuren im erweiterten Sinne als Geometrie bezeichnet.

Derjenige Theil der Geometrie, der nur graphische Lehrsätze enthält, heisst die **Geometrie der Lage.**

53. Irgend ein graphischer Satz stellt sich, wenn man ihn mit Hülfe der Definitionen α — η seines geometrischen Gewandes entkleidet, als ein analytischer Satz dar, welcher aus einem Systeme S von Gleichungen (Aneinanderliegen, DV u. s. w.) bez. Ungleichungen (getrennte Lage) ein anderes System S' analoger Art folgert. Die Thatsache, dass S' aus S gefolgert werden kann, erhält umgekehrt auf Grund der Definitionen α — η die Form eines graphischen Satzes. Es hindert uns aber Nichts, bei der geometrischen Fassung des analytischen Satzes von den Definitionen, welche in § 6 nebeneinander gestellt wurden, die neben den vorhin benutzten stehenden, im übrigen dieselben Definitionen in Anwendung zu bringen. Wir erhalten so einen (im Allgemeinen) neuen richtigen graphischen Satz, welcher sich von dem früheren nur dadurch unterscheidet, dass für „Punkt" jetzt „Ebene", für „Ebene" jetzt „Punkt" gesagt wird. Also:

A. Aus jedem graphischen Satze erhalten wir durch Vertauschung der Worte „Punkt" und „Ebene" einen (im Allgemeinen) neuen graphischen Satz.

Man nennt dieses Gesetz, welches die ganze Geometrie der Lage beherrscht, das Gesetz der Reciprocität oder Dualität im Raume. Man stellt hier jedem graphischen Begriffe einen anderen ebensolchen als reciproken oder dualen Begriff gegenüber: „Punkt" und „Ebene", „Punktreihe" und „Ebenenbüschel", „ebenes System" und „Bündel" sind duale Begriffe. Die Begriffe „Gerade", „Aneinanderliegen", „DV" sind sich selbst reciprok, ebenso ist der Begriff „Strahlenbüschel" (Gerade an einem Punkte und zugleich an einer Ebene) sich selbst reciprok.

Jeder Figur steht eine andere aus den reciproken Elementen gebildete als reciproke Figur gegenüber. Dabei kann eine Figur sich selbst reciprok sein. Das n-Eck und das n-Flach im Raume sind reciproke Figuren, jeder ebenen Figur steht als reciproke im Raume eine centrische Figur gegenüber u. s. w.

Auf Grund des Gesetzes A steht jedem Satze der Geometrie der Lage ein reciproker Satz gegenüber oder der Satz ist sich selbst reciprok, wie z. B. Satz n in § 6. Ebenen graphischen Sätzen stehen centrische als duale gegenüber.

Jeder graphische Satz ist der reciproke des zu ihm reciproken Satzes.

54. Das Gesetz A kann auf alle graphischen Sätze angewandt werden und umfasst das in **42** ausgesprochene Gesetz.

Auf graphische Sätze über Planfiguren bezieht sich ein weiteres Gesetz, auf welches jetzt eingegangen werden soll.

Führen wir in einer beliebigen Ebene des Raumes homogene (ternäre) lineare Coordinaten ein (**50**), so gilt für diese Ebene das in den Definitionen I—V des § 3 Ausgesagte, wenn wir nur in I und II „kann" für „soll" u. s. w. lesen (**51**). Folgert nun ein graphischer ebener Satz, analytisch genommen, aus einem System S von Gleichungen bez. Ungleichungen (siehe oben) ein System S' analoger Art, dann können wir annehmen, dass in S und S' nur homogene ternäre lineare Coordinaten vorkommen und dem analytischen Satze auf Grund von I—V eine Fassung geben, die sich von der früheren nur dadurch unterscheidet, dass „Gerade" und „Punkt" gesagt wird, wo vorher „Punkt" und „Gerade" stand. Also:

B. *Aus jedem graphischen Satze über Planfiguren erhält*

man einen (im Allgemeinen) neuen Satz über ebensolche Figuren, indem man die Worte „Punkt“ und „Gerade“ vertauscht.

Dieses Princip, welches das in **24** ausgesprochene umfasst, heisst das Gesetz der Reciprocität (Dualität) in der Ebene. Ihm entsprechend stellt man hier jedem graphischen Begriffe einen anderen als dualen gegenüber: „Punkt“ und „Gerade“, „Punktreihe“ und „Strahlenbüschel“ sind reciproke ebene Begriffe; die Begriffe „Aneinanderliegen“, „DV“ sind auch hier sich selbst reciprok. Man unterscheidet ferner reciproke Figuren und Lehrsätze.

Ein drittes Gesetz der Geometrie der Lage findet seine Anwendung bei centrischen Sätzen. Wendet man auf einen solchen Satz zuerst das Gesetz A an, so erhält man einen ebenen Satz und aus dem zu letzterem reciproken ebenen Satze (B) vermöge A wieder einen centrischen Satz. Dieser unterscheidet sich vom ursprünglichen dadurch, dass jetzt „Ebene“ für „Gerade“ gesagt wird und umgekehrt. Also:

C. *Aus einem graphischen Satze über centrische Figuren erhält man durch Vertauschung der Worte „Gerade“ („Strahl“) und „Ebene“ einen (im Allgemeinen) neuen Satz über ebensolche Figuren.*

Man beweist dieses Gesetz der Reciprocität im Bündel auch direkt mit Hülfe von Art. **50** analog wie *B.* Im Bündel sind „Gerade“ und „Ebene“, „Strahlenbüschel“ und „Ebenenbüschel“ duale graphische Begriffe; betr. DV u. s. w. gilt das oben Bemerkte.

Aus den Gesetzen A, B und C folgert man ein weiteres Gesetz. Wendet man auf einen ebenen Satz erst A, auf den so erhaltenen centrischen Satz C an, so hat man einen centrischen Satz, welcher sich von dem ebenen allein dadurch unterscheidet, dass für „Punkt der Ebene“ jetzt „Gerade des Bündels“, für „Gerade der Ebene“ jetzt „Ebene des Bündels“ gesagt wird. Wendet man auf einen centrischen Satz erst A, auf den erhaltenen ebenen Satz dann *B* an, so bekommt man einen ebenen Satz, welcher aus dem centrischen dadurch hervorgeht, dass in ihm die Worte „Strahl des Bündels“ und „Ebene des Bündels“ durch die Worte „Punkt der Ebene“ und „Gerade der Ebene“ ersetzt werden. Also:

D. *Ersetzt man in einem graphischen Satze über Planfiguren die Worte „Punkt der Ebene“ und „Gerade der Ebene“ bez. durch die Worte „Gerade des Bündels“ und „Ebene des Bündels“, so erhält man einen graphischen Satz im Bündel. Durch die umgekehrte Ersetzung geht aus jedem centrischen Satze der Geometrie der Lage ein ebener graphischer Satz hervor.*

Auch dieses Gesetz kann direkt aus **50** gefolgert werden.

55. Im nächsten Paragraphen bedürfen wir eines graphischen Satzes, der hier noch abgeleitet werden möge.

Es sei $abcd$ ein Tetraeder, y ein Punkt des Raumes, welcher keiner der Ebenen $bcd = \alpha$, $cda = \beta$, $dab = \gamma$, $abc = \delta$ angehöre. Nun besteht die Identität

$$u_a(bcdy) - u_b(acdy) + u_c(abdy) - u_d(abcy) + u_y(abcd) = 0$$

oder

$$A + B + C + D + E = 0,$$

wo $A = u_a(bcdy)$ u. s. w. Der Punkt $A + B = 0$ ist einerlei mit dem Punkte $C + D + E = 0$, er liegt mithin sowohl an der Geraden ab als an der Ebene cdy (**33**, **48**), es ist der Schnittpunkt der Geraden ab und der Ebene cdy. Wir wollen den Schnittpunkt der Geraden ab und der Ebene cdy allgemein mit (ab, cdy) bezeichnen. Dann hat also

(ab, cdy)	die	Gleichung	$A + B = 0,$
(ac, bdy)	„	„	$A + C = 0,$
(ad, bcy)	„	„	$A + D = 0,$
(bc, ady)	„	„	$B + C = 0,$
(bd, acy)	„	„	$B + D = 0,$
(cd, ady)	„	„	$C + D = 0.$

Wir bezeichnen diese Punkte in der aufgeführten Reihenfolge kurz mit $efghik$. Die zu abe, acf, adg, bch, bdi, cdk bez. vierten harmonischen Punkte $e'f'g'h'i'k'$ haben die Gleichungen

$$A - B = 0, \quad A - C = 0, \quad A - D = 0,$$
$$B - C = 0, \quad B - D = 0, \quad C - D = 0$$

nach (70). Die Punkte $e'f'h'$ liegen in gerader Linie, da $A - B + B - C + C - A = 0$ ist. Diese Gerade ist die Polare des Punktes (dy, abc) in Bezug auf das Dreieck abc (**27**).

Analog erkennt man, dass $e'g'i'$, $f'g'k'$ und $h'i'k'$ bez. in gerader Linie liegen. Die sechs Punkte $e'f'$ ... sind die Ecken eines vollständigen ebenen Vierseits. Also:

Ist ein Tetraeder $abcd$ und ein Punkt y gegeben, welcher keiner der Ebenen $\alpha = bcd$ u. s. w. angehört, so liegen die Polare des Punktes (ay, bcd) in Bezug auf das Dreieck bcd, von (by, cda) in Bezug auf cda, von (cy, dab) in Bezug auf dab und von (dy, abc) in Bezug auf abc in einer Ebene.

Diese Ebene heisst die Polarebene des Punktes y in Bezug auf das Tetraeder $abcd$ oder $\alpha\beta\gamma\delta$.

In Folge des zu diesem Satze reciproken Satzes (A) erhält man zu jeder Ebene v, welche nicht an a, b, c oder d liegt, einen bestimmten Punkt, welcher der Pol der Ebene v in Bezug auf das Tetraeder $\alpha\beta\gamma\delta$ oder $abcd$ genannt wird.

Wir wollen die Gleichung der Polarebene von y in Bezug auf $abcd$ aufstellen. Die Punkte $e'h'k'$ liegen nicht in gerader Linie, bestimmen also die Polarebene; e' hat die Gleichung $\alpha_y u_a + \beta_y u_b = 0$, wenn $\alpha_i = (bcd)_i$, $\beta_i = (cda)_i$ u. s. w. gesetzt wird, h' die Gleichung $\beta_y u_b + \gamma_y u_c = 0$, k' die Gleichung $\gamma_y u_c + \delta_y u_d = 0$. Die Gleichung der Polarebene ist also

$$(79) \qquad \alpha_x\beta_y\gamma_y\delta_y + \alpha_y\beta_x\gamma_y\delta_y + \alpha_y\beta_y\gamma_x\delta_y + \alpha_y\beta_y\gamma_y\delta_x = 0.$$

Der Pol der Ebene v in Bezug auf das Tetraeder $\alpha\beta\gamma\delta = abcd$ hat sonach die Gleichung (A)

$$(80) \qquad u_a v_b v_c v_d + v_a u_b v_c v_d + v_a v_b u_c v_d + v_a v_b v_c u_d = 0.$$

Für

$$v_i = \alpha_y\beta_y\gamma_y\delta_i + \alpha_y\beta_y\gamma_i\delta_y + \alpha_y\beta_i\gamma_y\delta_y + \alpha_i\beta_y\gamma_y\delta_y$$

wird (80) zu

$$u_a\alpha_y - u_b\beta_y + u_c\gamma_y - u_d\delta_y = 0,$$

da $a_\beta = a_\gamma = a_\delta = b_\alpha = \cdots = 0$, $a_\alpha = -b_\beta = c_\gamma = -d_\delta$ ist, oder zu $u_a(bcdy) - u_b(acdy) + \cdots = 0$, wofür wir wegen einer bekannten Identität

$$u_y = 0$$

schreiben können. Also haben wir mit Rücksicht auf A den Satz:

Der Punkt y ist der Pol seiner Polarebene, die Ebene v die Polarebene ihres Poles.

§ 9. Lineare Coordinaten im Raume.

56. Es sei P ein beweglicher Punkt des Raumes, $p_1 | p_2 | p_3 | p_4$ seien lineare Formen seiner homogenen rechtwinkligen Coordinaten $P_1 | P_2 | P_3 | P_4$, unter sich jedoch nicht linear abhängig, also

$$\begin{aligned} p_1 &= a_{11} P_1 + a_{21} P_2 + a_{31} P_3 + a_{41} P_4, \\ p_2 &= a_{12} P_1 + a_{22} P_2 + a_{32} P_3 + a_{42} P_4, \\ p_3 &= a_{13} P_1 + a_{23} P_2 + a_{33} P_3 + a_{43} P_4, \\ p_4 &= a_{14} P_1 + a_{24} P_2 + a_{34} P_3 + a_{44} P_4, \end{aligned} \tag{81}$$

wo die Determinante $M = \sum \pm a_{11} a_{22} a_{33} a_{44}$ nicht verschwindet. Wir bezeichnen $adj a_{ik}$ in M mit α_{ik} und finden aus (81)

$$\begin{aligned} MP_1 &= \alpha_{11} p_1 + \alpha_{12} p_2 + \alpha_{13} p_3 + \alpha_{14} p_4, \\ MP_2 &= \alpha_{21} p_1 + \alpha_{22} p_2 + \alpha_{23} p_3 + \alpha_{24} p_4, \\ MP_3 &= \alpha_{31} p_1 + \alpha_{32} p_2 + \alpha_{33} p_3 + \alpha_{34} p_4, \\ MP_4 &= \alpha_{41} p_1 + \alpha_{42} p_2 + \alpha_{43} p_3 + \alpha_{44} p_4. \end{aligned} \tag{82}$$

Die Determinante $\sum \pm \alpha_{11} \alpha_{22} \alpha_{33} \alpha_{44}$ ist bekanntlich gleich M^3.

Die Veränderlichen p_i und P_i hängen linear zusammen. Jedem Punkte P entspricht vermöge (81) ein homogenes (quaternäres) Werthesystem $p_1 | p_2 | p_3 | p_4$ und umgekehrt jedem solchen vermöge (82) ein Punkt P des Raumes. Wir bezeichnen deshalb $p_1 | p_2 | p_3 | p_4$ als homogene lineare Punktcoordinaten im Raume.

Man gelangt von den rechtwinkligen zu den linearen Punktcoordinaten mittelst linearer Substitution (**11**).

Wir wollen allgemein die homogenen Coordinaten des Punktes P im rechtwinkligen Systeme, wie bisher, mit $P_1 | P_2 | P_3 | P_4$ und im linearen Systeme mit $p_1 | p_2 | p_3 | p_4$ bezeichnen.

Die vier Ebenen XYP, XYQ, XYR, XYS haben nach Def. ζ in § 6 das DV

$$\frac{(XYPR)\,(XYQS)}{(XYPS)\,(XYQR)}.$$

In diesen Ausdruck führen wir die linearen Coordinaten von $PQ\ldots$ ein. Es ist wegen (81)

$$(xypr) = M(XYPR),$$
$$(xyqs) = M(XYQS)$$

u. s. w., also

$$XY(PQRS) = \frac{(xypr)(xyqs)}{(xyps)(xyqr)}. \tag{83}$$

Rechts kommen nur die linearen Coordinaten der sechs Punkte, nicht die das lineare Coordinatensystem bestimmenden Substitutionscoefficienten a_{ik} vor. Zugleich erkennt man, dass sich das DV der vier Ebenen aus den neuen Coordinaten genau so berechnet, wie aus den alten.

Zu den Werthen $1|0|0|0$, $0|1|0|0$, $0|0|1|0$, $0|0|0|1$, $1|1|1|1$ von $p_1|p_2|p_3|p_4$ gehören nach (82) die Punkte mit den rechtwinkligen Coordinaten

$\alpha_{11}|\alpha_{21}|\alpha_{31}|\alpha_{41}$, $\alpha_{12}|\alpha_{22}|\alpha_{32}|\alpha_{42}$, $\alpha_{13}|\alpha_{23}|\alpha_{33}|\alpha_{43}$, $\alpha_{14}|\alpha_{24}|\alpha_{34}|\alpha_{44}$, $\sum\alpha_{1i}|\sum\alpha_{2i}|\sum\alpha_{3i}|\sum\alpha_{4i}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$, welche wir auch mit $ABCDE$ bezeichnen wollen; E_i ist gleich $A_i + B_i + C_i + D_i$.

Nach (83) ist

$$AB(CDEP) = \frac{p_3}{p_4},\quad AC(BDEP) = \frac{p_2}{p_4},\quad AD(BCEP) = \frac{p_2}{p_3},$$
$$BC(ADEP) = \frac{p_1}{p_4},\quad BD(ACEP) = \frac{p_1}{p_3},\quad CD(ABEP) = \frac{p_1}{p_2}.$$

Die Verhältnisse der $p_1|p_2|p_3|p_4$ sind sonach DVe. Wir bezeichnen daher die homogenen linearen Coordinaten $p_1|p_2|p_3|p_4$ auch als homogene DV-Coordinaten des Punktes P des Raumes.

Von den Punkten $ABCDE$ liegen keine vier in einer Ebene. Die Punkte $ABCD$ heissen bez. der erste, zweite, dritte, vierte Grund- oder Fundamentalpunkt, E heisst der EP des Systems von DV-Coordinaten im Raume.

Irgend fünf Punkte $ABCDE$ des Raumes, von denen keine vier derselben Ebene angehören, bestimmen ein System von DV-Coordinaten, in welchem $ABCD$ (in bestimmter Reihenfolge) die Fundamentalpunkte, E den EP vorstellen (28).

57. Geben wir dem Inhalte des vorigen Artikels die reciproke Fassung (A), so erhalten wir homogene lineare Ebenencoordinaten im Raume, die auch als homogene DV-Coordinaten bezeichnet werden können; an Stelle der

Grundpunkte treten Fundamentalebenen ΑΒΓΔ, an Stelle des EP tritt eine EE Ε.

Bedeuten allgemein $U_1 | U_2 | U_3 | U_4$ die homogenen rechtwinkligen, $u_1 | u_2 | u_3 | u_4$ die homogenen linearen Coordinaten der Ebene U, so ist

$$\mathsf{AB}(\Gamma\Delta\mathsf{E}U) = \frac{u_3}{u_4}, \quad \mathsf{A}\Gamma(\mathsf{B}\Delta\mathsf{E}U) = \frac{u_2}{u_4}, \quad \mathsf{A}\Delta(\mathsf{B}\Gamma\mathsf{E}U) = \frac{u_2}{u_3}$$

u. s. w.

Führt man im Raume gleichzeitig homogene lineare *Punkt- und Ebenencoordinaten* ein, so richtet man es *stets* so ein, dass durch die betreffenden linearen Substitutionen gerade

$$U_P = u_p \tag{84}$$

wird; dieses ist immer möglich. Denn man nehme die Formeln (81) oder, was dasselbe heisst, die Punkte $ABCDE$ beliebig an; dann wird wegen (82)

$$MU_P = p_1(U_1\alpha_{11} + U_2\alpha_{21} + \cdots) + p_2(U_1\alpha_{12} + U_2\alpha_{22} + \cdots) + \cdots$$

und das Verlangte ist erfüllt, wenn man

$$\begin{aligned} Mu_1 &= \alpha_{11}U_1 + \alpha_{21}U_2 + \alpha_{31}U_3 + \alpha_{41}U_4, \\ Mu_2 &= \alpha_{12}U_1 + \alpha_{22}U_2 + \alpha_{32}U_3 + \alpha_{42}U_4, \\ Mu_3 &= \alpha_{13}U_1 + \alpha_{23}U_2 + \alpha_{33}U_3 + \alpha_{43}U_4, \\ Mu_4 &= \alpha_{14}U_1 + \alpha_{24}U_2 + \alpha_{34}U_3 + \alpha_{44}U_4 \end{aligned} \tag{85}$$

setzt, was erlaubt ist, da $\sum \pm \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33}\alpha_{44} = M^3$ nicht Null ist. Aus (85) folgt

$$\begin{aligned} U_1 &= a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + a_{13}u_3 + a_{14}u_4, \\ U_2 &= a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + a_{23}u_3 + a_{24}u_4, \\ U_3 &= a_{31}u_1 + a_{32}u_2 + a_{33}u_3 + a_{34}u_4, \\ U_4 &= a_{41}u_1 + a_{42}u_2 + a_{43}u_3 + a_{44}u_4. \end{aligned} \tag{86}$$

Die homogenen rechtwinkligen Coordinaten von ΑΒΓΔΕ sind sonach

$$a_{11}|a_{21}|a_{31}|a_{41}, \quad a_{12}|a_{22}|a_{32}|a_{42}, \quad a_{13}|a_{23}|a_{33}|a_{43}, \quad a_{14}|a_{24}|a_{34}|a_{44},$$
$$\sum a_{1i} | \sum a_{2i} | \sum a_{3i} | \sum a_{4i} \; (i = 1, 2, 3, 4).$$

Die Punkte ΑΒΓ, ΒΓΔ, ΓΔΑ, ΔΑΒ sind also bez. die Punkte $DABC$ (s. Satz f in 44), d. h. das Tetraeder ΑΒΓΔ ist einerlei mit dem Tetraeder $ABCD$.

Der Pol der Ebene E in Bezug auf dieses Tetraeder hat nach (80) die Gleichung

$$U_A \mathsf{E}_B \mathsf{E}_C \mathsf{E}_D + \mathsf{E}_A U_B \mathsf{E}_C \mathsf{E}_D + \cdots\cdots = 0$$

oder, da

$$\mathsf{E}_A = \mathsf{E}_B = \mathsf{E}_C = \mathsf{E}_D = M, \quad U_A + U_B + U_C + U_D = U_E$$

ist,

$$U_E = 0.$$

Der EP und die EE stehen in der Beziehung von Pol und Polarebene in Bezug auf das Fundamentaltetraeder.

58. Sind $x_1 | x_2 | x_3 | x_4$, $u_1 | u_2 | u_3 | u_4$ homogene quaternäre Werthesysteme beliebiger Art, so können wir von einem Punkte P und einer Ebene U sprechen, welche im linearen Systeme die homogenen Coordinaten $x_1 | x_2 | x_3 | x_4$ bez. $u_1 | u_2 | u_3 | u_4$ besitzen (vgl. Def. α und β in § 6).

Die Elemente P und U liegen dann und nur dann aneinander, wenn $u_x = 0$ ist, wie aus (84) hervorgeht (vgl. Def. γ).

Eine Gerade im Raume wird durch zwei Gleichungen $u_x = 0$, $v_x = 0$ oder $u_x = 0$, $u_y = 0$ dargestellt, wenn die Punkte XY und die Ebenen UV an dieser Geraden liegen (vgl. Def. δ).

Durch Gleichung (83) ist das DV von vier Ebenen, ebenso das von vier Punkten gegeben (A). Vgl. Def. ε und ζ.

Man kann also in den analytischen Entwicklungen, welche sich auf jene Definitionen stützen, unter den homogenen rechtwinkligen auch homogene lineare Coordinaten verstehen. So gestaltet sich dann z. B. die Parameterdarstellung in Grundgebilden erster oder zweiter Stufe genau so, wie früher. Die Punkte $\varkappa_1 u_a + \varkappa_2 u_b = 0$, $\lambda_1 u_a + \lambda_2 u_b = 0$, $\mu_1 u_a + \mu_2 u_b = 0$, $\nu_1 u_a + \nu_2 u_b = 0$ liegen in einer Geraden und haben das DV $\frac{(\varkappa\mu)(\lambda\nu)}{(\varkappa\nu)(\lambda\mu)}$. U. s. w. (**30**).

Man erhält ferner, indem man

$$x_i y_k - x_k y_i = p_{ik}, \quad u_i v_k - u_k v_i = \pi_{ik}$$

setzt, für die Gerade $XY = UV$ des Raumes neue Coordinaten $p_{12} | p_{13} | \cdots\cdots = \pi_{34} | \pi_{42} | \cdots\cdots$ Die alten Coordinaten dieser Geraden sollen mit $P_{12} | P_{13} | \ldots$ bezeichnet werden. Dann ist wegen (81)

$$p_{ik} = \begin{vmatrix} x_i & x_k \\ y_i & y_k \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{1i}X_1+a_{2i}X_2+a_{3i}X_3+a_{4i}X_4 & a_{1k}X_1+a_{2k}X_2+a_{3k}X_3+a_{4k}X_4 \\ a_{1i}Y_1+\cdots\cdots & a_{1k}Y_1+\cdots\cdots \end{vmatrix}$$

oder, wenn allgemein

$$a_{il}a_{km} - a_{kl}a_{im} = a_{ik}^{(lm)}$$

gesetzt wird*),

$$(87)\quad p_{ik} = a_{12}^{(ik)}P_{12} + a_{13}^{(ik)}P_{13} + a_{14}^{(ik)}P_{14} + a_{34}^{(ik)}P_{34} + a_{42}^{(ik)}P_{42} + a_{23}^{(ik)}P_{23}.$$

Die Determinante dieses Systems linearer Gleichungen ist gleich M^3, mithin nicht Null. Die Veränderlichen p_{ik} und P_{ik} hängen demnach linear zusammen, weshalb wir $p_{12}|p_{13}|\ldots$ als homogene lineare Liniencoordinaten im Raume bezeichnen.

Auch den linearen Liniencoordinaten kann man eine geometrische Bedeutung zulegen.

Wir bezeichnen die Schnittpunkte der Geraden AE, BE, CE, DE mit den Ebenen $\mathsf{AB\Gamma\Delta}$ bez. mit $E_1E_2E_3E_4$. Dann ist E_1 der Pol der Schnittlinie der Ebenen $\mathsf{A} = BCD$ und E in Bezug auf das Dreieck BCD u. s. w. (55).

Die Gerade $P = XY$ des Raumes treffe die Ebenen $\mathsf{AB\Gamma\Delta}$ bez. in $Z_1Z_2Z_3Z_4$. Im linearen Systeme hat Z_1 nach (69) die Gleichung $u_yx_1 - u_xy_1 = 0$, da $v_1|v_2|v_3|v_4 = 1|0|0|0$ zu nehmen ist, also die Coordinaten

$$0\,|\,x_1y_2 - x_2y_1\,|\,x_1y_3 - x_3y_1\,|\,x_1y_4 - x_4y_1 \quad \text{oder} \quad 0\,|\,p_{12}\,|\,p_{13}\,|\,p_{14}.$$

Als Coordinaten von $Z_2Z_3Z_4$ findet man analog

$$p_{21}\,|\,0\,|\,p_{23}\,|\,p_{24},\quad p_{31}\,|\,p_{32}\,|\,0\,|\,p_{34},\quad p_{41}\,|\,p_{42}\,|\,p_{43}\,|\,0.$$

Nach 56 ist aber

$$AB(CDEZ_1) = \frac{p_{13}}{p_{14}},\quad AC(DBEZ_1) = \frac{p_{14}}{p_{12}},\quad AD(BCEZ_1) = \frac{p_{12}}{p_{13}},$$

nach Satz q in 45

$$AB(CDEZ_1) = B(CDE_1Z_1)$$

u. s. w., also hat Z_1 im Systeme $BCDE_1$ die DV-Coordinaten $p_{12}|p_{13}|p_{14}$ (48). Analoges gilt für $Z_2Z_3Z_4$ und damit ist folgende Zusammenstellung gewonnen: Die homogenen ternären DV-Coordinaten von

---

*) Diese Bezeichnung entnehme ich Clebsch-Lindemann, Vorl. über Geom., Leipzig 1891, Bd. II, S. 93.

Z_1 im Systeme $BCDE_1$ sind $p_{12} | p_{13} | p_{14}$,
Z_2 „ „ $CDAE_2$ „ $p_{23} | p_{24} | p_{21}$,
Z_3 „ „ $DABE_3$ „ $p_{34} | p_{31} | p_{32}$,
Z_4 „ „ $ABCE_4$ „ $p_{41} | p_{42} | p_{43}$.

Dieser Deutung der homogenen linearen räumlichen Liniencoordinaten steht eine zweite reciprok gegenüber, welche man durch Anwendung des Gesetzes A in § 8 auf die vorhergehende erhält; auch die linearen Liniencoordinaten kann man als DV-Coordinaten bezeichnen.

Homogene lineare Punkt-, Linien- und Ebenencoordinaten denkt man sich in der angegebenen Weise gleichzeitig eingeführt, wenn von einem Systeme von linearen Coordinaten oder DV-Coordinaten im Raume gesprochen wird.

59. Wir führen jetzt besondere lineare Coordinaten im Raume folgendermassen ein.

Als Grundebenen ΑΒΓ wählen wir drei eigentliche zu je zweien senkrechte Ebenen, als Grundebene Δ die unendlich ferne Ebene, als EP E einen eigentlichen Punkt, welcher von den Geraden $\mathsf{B\Gamma} = AD$, $\mathsf{\Gamma A} = BD$, $\mathsf{AB} = CD$ gleichen Abstand $EE_1 = EE_2 = EE_3$ hat. Das lineare System ist hierdurch festgelegt; in ihm besitze der Punkt P die Coordinaten $x_1 | x_2 | x_3 | x_4$, diejenigen im rechtwinkligen seien $x_1' | x_2' | x_3' | x_4'$.

Ist P nicht unendlich fern, so treffen die drei durch P parallel zu ΑΒΓ gelegten Ebenen die Geraden DA, DB, DC bez. in drei Punkten $P_x P_y P_z$.

Nach dem Doppelsatze $o - p$ in **45** ist

$$BC(ADEP) = (ADE_1 P_x).$$

Ferner ist nach **56**

$$BC(ADEP) = \frac{x_1}{x_4},$$

also

$$(ADE_1 P_x) = \frac{x_1}{x_4}.$$

Nun ist aber A der unendlich ferne Punkt der Geraden AD, mithin $\frac{x_1}{x_4}$ die Abscisse von P_x im Systeme DE_1 (7, 2). Analog

zeigt man, dass $\frac{x_2}{x_4}$ die Abscisse von P_y im Systeme DE_2, $\frac{x_3}{x_4}$ die von P_z in DE_3 ist. Also sind $x_1 | x_2 | x_3 | x_4$ homogene rechtwinklige Coordinaten von P in einem Systeme mit den Axen DA, DB, DC und dem EP E (**32**). Ferner sind wegen (84) die homogenen linearen Ebenen- und Liniencoordinaten jetzt gleichbedeutend mit homogenen rechtwinkligen.

Die homogenen rechtwinkligen Coordinaten im Raume sind specielle lineare räumliche Coordinaten.

Im eben behandelten Specialfalle haben wir in (81) $a_{14} = a_{24} = a_{34} = 0$ zu setzen, da die Ebene $\triangle$ hier die unendlich ferne Ebene $0|0|0|1$ vorstellt (auf die weitere Bestimmung der Substitutionscoefficienten kommt es uns nicht an). Die Formeln (81) und (86) gehen dadurch in die Formeln (53) und (54) über. Hierdurch ist nachträglich bewiesen, dass die Formeln für die Transformation der rechtwinkligen Punkt- und Ebenencoordinaten die früher angegebene Form haben.

§ 10. Die Transformation der linearen Coordinaten.

60. Wir denken uns in einer Geraden zwei verschiedene Systeme von linearen oder DV-Coordinaten eingeführt. Die Grundpunkte und der EP des einen seien abe, des anderen $a'b'e'$. Der Punkt p unserer Geraden besitze die homogenen Coordinaten $x_1 | x_2$ im ersteren, $x_1' | x_2'$ im letzteren Systeme. Die Coordinaten der Punkte abe im Systeme $a'b'e'$ sollen mit $a_1 | a_2$, $b_1 | b_2$, $e_1 | e_2$ bezeichnet werden. Dann ist.

$$\frac{x_1}{x_2} = (abep) = \frac{(ae)(bx')}{(ax')(be)},$$

mithin $\frac{x_1}{x_2}$ eine lineare eigentliche Funktion von $\frac{x_1'}{x_2'}$ (S. 11). Wir können also

$$(88) \qquad \begin{aligned} x_1 &= \alpha x_1' + \beta x_2', \\ x_2 &= \gamma x_1' + \delta x_2' \end{aligned}$$

setzen, wo $\alpha\delta - \beta\gamma = \triangle$ nicht Null ist. Mit Worten:

Man transformirt von homogenen linearen oder DV-Coordinaten in der Geraden zu ebensolchen Coordinaten mittelst einer homogenen (binären) linearen Substitution.

Sind, wie oben, $x_1 | x_2$ DV-Coordinaten des Punktes p unserer Geraden in einem Systeme abe und wir gehen mittelst irgend einer linearen (nicht identischen) Substitution (88) zu Veränderlichen $x_1' | x_2'$ über, so sind $x_1' | x_2'$ ebenfalls DV-Coordinaten von p in einem neuen Systeme, dessen Grundpunkte $a'b'$ und EP e' im Systeme abe bez. die Coordinaten $\alpha | \gamma$, $\beta | \delta$, $\alpha + \beta | \gamma + \delta$ besitzen. Denn man findet wegen (88)

$$\frac{x_1'}{x_2'} = (a'b'e'p)$$

durch dieselbe Rechnung, wie S. 10—11; $a'b'e'$ sind verschiedene Punkte u. s. w.

Aus (88) erhält man die Formeln,

$$(89) \qquad \begin{aligned} \triangle x_1' &= \delta x_1 - \beta x_2, \\ \triangle x_2' &= -\gamma x_1 + \alpha x_2, \end{aligned}$$

welche dazu dienen, die neuen Coordinaten aus den alten zu berechnen; das Umgekehrte geschieht durch (88). Aus (89) ersieht man, dass die Punkte abe im Systeme $a'b'e'$ die homogenen Coordinaten $\delta | -\gamma$, $-\beta | \alpha$, $\delta - \beta | -\gamma + \alpha$ besitzen.

Die nicht identische Substitution $x_1 = \alpha x_1'$, $x_2 = \delta x_2'$ verändert nur den EP.

Aus unseren früheren Untersuchungen ging hervor, dass das DV $\frac{(pr)(qs)}{(ps)(qr)}$ von vier Punkten $pqrs$ der linearen Coordinaten $p_1 | p_2$, $q_1 | q_2$, ... vom linearen Coordinatensysteme unabhängig ist. Man bestätigt dies jetzt direkt; sind nämlich $p_1' | p_2'$, $q_1' | q_2'$, ... die Coordinaten von pq .. in einem anderen Systeme von DV-Coordinaten, so ist wegen (88)

$$(pr) = \triangle(p'r'), \quad (qs) = \triangle(q's')$$

u. s. w., also

$$\frac{(pr)(qs)}{(ps)(qr)} = \frac{(p'r')(q's')}{(p's')(q'r')}.$$

Das oben über die Gerade Gesagte gilt auch für das Strahlen- und Ebenenbüschel. Die Transformation der DV-Coordinaten in Grundgebilden erster Stufe ist somit erledigt.

61. Wir wenden uns jetzt zur Transformation der DV-Coordinaten in Grundgebilden zweiter Stufe.

Wir denken uns in einer Ebene zwei verschiedene Systeme solcher Coordinaten eingeführt. Die Grundpunkte und den EP im einen bezeichnen wir mit $abce$, im anderen mit $a'b'c'e'$. Die Coordinaten von $abce$ im Systeme $a'b'c'e'$ seien $a_1 | a_2 | a_3$, $b_1 | b_2 | b_3$ u. s. w. Besitzt nun der Punkt p der Ebene die Coordinaten $x_1 | x_2 | x_3$ in $abce$, $x_1' | x_2' | x_3'$ in $a'b'c'e'$, so ist

$$\frac{x_2}{x_3} = a(bcep) = \frac{(abe)(acx')}{(ace)(abx')}$$

u. s. w., schliesslich

$$x_1 : x_2 : x_3$$
$$= (abe)(ace)(bcx') : (abe)(bce)(acx') : (bce)(ace)(abx'),$$

wofür wir die linearen Gleichungen

$$(90) \qquad \begin{aligned} x_1 &= a_{11}x_1' + a_{21}x_2' + a_{31}x_3', \\ x_2 &= a_{12}x_1' + a_{22}x_2' + a_{32}x_3', \\ x_3 &= a_{13}x_1' + a_{23}x_2' + a_{33}x_3' \end{aligned}$$

schreiben können. Ihre Determinante $\triangle$ ist nicht Null, da abc, abe, u. s. w. nicht in gerader Linie liegen. Also (B):

Die Transformation der homogenen linearen Punktcoordinaten in der Ebene geschieht mittelst einer homogenen (ternären) linearen Substitution; das Gleiche gilt von der Transformation der homogenen linearen Liniencoordinaten in der Ebene.

Lassen wir den Veränderlichen $x_1 | x_2 | x_3$ ihre Bedeutung und gehen mittelst irgend einer linearen Substitution (90) zu neuen Veränderlichen $x_1' | x_2' | x_3'$ über, so sind $x_1' | x_2' | x_3'$ homogene DV-Coordinaten von p in einem neuen Systeme, dessen Grundpunkte und EP $a'b'c'e'$ im Systeme $abce$ die Coordinaten

$$a_{11} | a_{12} | a_{13}, \quad a_{21} | a_{22} | a_{23}, \quad a_{31} | a_{32} | a_{33},$$
$$a_{11} + a_{21} + a_{31} \mid a_{12} + a_{22} + a_{32} \mid a_{13} + a_{23} + a_{33}$$

besitzen. Denn man findet wegen (90)

$$\frac{x_2'}{x_3'} = a'(b'c'e'p), \quad \frac{x_3'}{x_1'} = b'(c'a'e'p), \quad \frac{x_1'}{x_2'} = c'(a'b'e'p)$$

durch dieselbe Rechnung, wie S. 36—37; $a'b'c'$, $a'b'e'$ u. s. w. liegen nicht in gerader Linie, also sind $x_1' | x_2' | x_3'$ DV-Coordi-

naten von p im Systeme $a'b'c'e'$. — Das Reciproke gilt von den ebenen Liniencoordinaten (B).

Nunmehr wollen wir die Punkte *und* Geraden unserer Ebene gleichzeitig auf zwei verschiedene Systeme S und S' von DV-Coordinaten beziehen; die Grundpunkte, der EP und die EL in S sollen mit $abce\varepsilon$, in S' mit $a'b'c'e'\varepsilon'$ bezeichnet werden. Die Transformation der Punktcoordinaten $x_1 | x_2 | x_3$ im Systeme S nach den Punktcoordinaten $x_1' | x_2' | x_3'$ in S' werde durch (90) ausgeführt. Dann ist

$$\begin{aligned} u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 &= x_1'(a_{11} u_1 + a_{12} u_2 + a_{13} u_3) \\ &\quad + x_2'(a_{21} u_1 + \cdots) + x_3'(a_{31} u_1 + \cdots) \\ &= x_1' u_1' + x_2' u_2' + x_3' u_3', \end{aligned}$$

wenn

$$\begin{aligned} u_1' &= a_{11} u_1 + a_{12} u_2 + a_{13} u_3, \\ u_2' &= a_{21} u_1 + a_{22} u_2 + a_{23} u_3, \\ u_3' &= a_{31} u_1 + a_{32} u_2 + a_{33} u_3 \end{aligned} \tag{91}$$

gesetzt wird.

Sind $u_1 | u_2 | u_3$ die Coordinaten der Geraden u in S, so hat u in S' die Gleichung $u_1' x_1' + u_2' x_2' + u_3' x_3' = 0$, also in letzterem Systeme die Coordinaten $u_1' | u_2' | u_3'$. Die Transformation der Liniencoordinaten ist also durch (91) gegeben. Die lineare Substitution von den u_i' zu den u_i ist die transponirte derjenigen von den x_i zu den x_i'.

Aus (90) ergeben sich, wenn der Modul der Substitutionen (90) und (91) mit $\triangle$, $adj\, a_{ik}$ in Δ mit α_{ik} bezeichnet wird, die Formeln

$$\begin{aligned} \triangle x_1' &= \alpha_{11} x_1 + \alpha_{12} x_2 + \alpha_{13} x_3, \\ \triangle x_2' &= \alpha_{21} x_1 + \alpha_{22} x_2 + \alpha_{23} x_3, \\ \triangle x_3' &= \alpha_{31} x_1 + \alpha_{32} x_2 + \alpha_{33} x_3, \end{aligned} \tag{92}$$

aus (91) die Formeln

$$\begin{aligned} \triangle u_1 &= \alpha_{11} u_1' + \alpha_{21} u_2' + \alpha_{31} u_3' \cdot \\ \triangle u_2 &= \alpha_{12} u_1' + \alpha_{22} u_2' + \alpha_{32} u_3', \\ \triangle u_3 &= \alpha_{13} u_1' + \alpha_{23} u_2' + \alpha_{33} u_3', \end{aligned} \tag{93}$$

welche die umgekehrten Uebergänge vermitteln.

Die Formeln (90) — (93) stellen die *Transformation der linearen ebenen Coordinaten* vollständig dar. Durch Substitu-

tionen von dieser Beschaffenheit wird immer eine Transformation der linearen Coordinaten in der Ebene bewirkt. Bezeichnen wir noch die Fundamentallinien in S mit $\alpha\beta\gamma$, in S' mit $\alpha'\beta'\gamma'$, so gilt über die geometrische Bedeutung der Substitutionscoefficienten a_{ik} und α_{ik} Folgendes: die Punkte $a'b'c'e'$ besitzen im Systeme S die Coordinaten $a_{11} | a_{12} | a_{13}$, $a_{21} | a_{22} | a_{23}$ u. s. w. (S. 89); die Geraden $\alpha'\beta'\gamma'\varepsilon'$ haben in S die Coordinaten

$$\alpha_{11} | \alpha_{12} | \alpha_{13}, \quad \alpha_{21} | \alpha_{22} | \alpha_{23}, \quad \alpha_{31} | \alpha_{32} | \alpha_{33},$$
$$\alpha_{11} + \alpha_{21} + \alpha_{31} \,|\, \alpha_{12} + \alpha_{22} + \alpha_{32} \,|\, \alpha_{13} + \alpha_{23} + \alpha_{33}.$$

Im Systeme S' besitzen die Punkte $abce$ die Coordinaten

$$\alpha_{11} | \alpha_{21} | \alpha_{31}, \quad \alpha_{12} | \alpha_{22} | \alpha_{32}, \quad \alpha_{13} | \alpha_{23} | \alpha_{33},$$
$$\alpha_{11} + \alpha_{12} + \alpha_{13} \,|\, \alpha_{21} + \alpha_{22} + \alpha_{23} \,|\, \alpha_{31} + \alpha_{32} + \alpha_{33},$$

die Geraden $\alpha\beta\gamma\varepsilon$ die Coordinaten

$$a_{11} | a_{21} | a_{31}, \quad a_{12} | a_{22} | a_{32}, \quad a_{13} | a_{23} | a_{33},$$
$$a_{11} + a_{12} + a_{13} \,|\, a_{21} + a_{22} + a_{23} \,|\, a_{31} + a_{32} + a_{33}.$$

Dies geht aus den Formeln (91)—(93) unmittelbar hervor.

Was die *Transformation der linearen Coordinaten im Bündel* anbelangt, so braucht nur auf das Gesetz A in § 8 verwiesen zu werden.

Man beweise schliesslich, dass die DVe (73) und (77) vom linearen Coordinatensysteme unabhängig sind direkt mittelst der Formeln (90) und (91); dass der Ausdruck $u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3$ vom linearen Coordinatensysteme nicht abhängt, geht aus Obigem unmittelbar hervor (vgl. **23**).

62. Die Transformation der linearen Coordinaten im Raume wird ebenfalls durch lineare Substitutionen vollzogen. Denn sind $x_1 | x_2 | x_3 | x_4$ und $x_1' | x_2' | x_3' | x_4'$ homogene lineare Coordinaten des Punktes p in zwei verschiedenen räumlichen Systemen S und S', so hängen die Veränderlichen x_i sowohl als x_i' mit den rechtwinkligen Coordinaten $p_1 | p_2 | p_3 | p_4$ von p linear zusammen (**56**), also stehen die x_i und x_i' auch unter sich in linearem Zusammenhange (**11**). Gleiches gilt für die Ebenen- und Liniencoordinaten.

Geht man von Veränderlichen $x_1 | x_2 | x_3 | x_4$, welche die eben angegebene Bedeutung haben, mittelst irgend einer linearen Substitution

$$
(94)\qquad
\begin{aligned}
x_1 &= a_{11}x_1' + a_{21}x_2' + a_{31}x_3' + a_{41}x_4',\\
x_2 &= a_{12}x_1' + a_{22}x_2' + a_{32}x_3' + a_{42}x_4',\\
x_3 &= a_{13}x_1' + a_{23}x_2' + a_{33}x_3' + a_{43}x_4',\\
x_4 &= a_{14}x_1' + a_{24}x_2' + a_{34}x_3' + a_{44}x_4'
\end{aligned}
$$

zu neuen Veränderlichen x_i' über, so sind $x_1' | x_2' | x_3' | x_4'$ homogene lineare Coordinaten von p und zwar in einem neuen Systeme S', falls (94) nicht die identische Substitution ist. Denn es hängen dann die p_i und x_i, ebenso die x_i' und x_i linear zusammen, also gilt das Gleiche von den p_i und x_i', $x_1' | x_2' | x_3' | x_4'$ sind lineare Coordinaten von p in einem neuen Systeme S'.

Die Grundpunkte $a'b'c'd'$ und der EP e' von S' besitzen im Systeme S die Coordinaten

$$
a_{11}|a_{12}|a_{13}|a_{14},\quad a_{21}|a_{22}|a_{23}|a_{24},\quad a_{31}|a_{32}|a_{33}|a_{34},\quad a_{41}|a_{42}|a_{43}|a_{44},
$$
$$
\sum a_{i1} \,|\, \sum a_{i2} \,|\, \sum a_{i3} \,|\, \sum a_{i4} \quad (i = 1, 2, 3, 4).
$$

Aus (94) folgt, wenn

$$
\sum \pm a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} = \triangle, \quad adj\, a_{ik} \text{ in } \triangle = \alpha_{ik}
$$

gesetzt wird,

$$
(95)\qquad
\begin{aligned}
\triangle x_1' &= \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 + \alpha_{14}x_4,\\
\triangle x_2' &= \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \alpha_{23}x_3 + \alpha_{24}x_4,\\
\triangle x_3' &= \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \alpha_{33}x_3 + \alpha_{34}x_4,\\
\triangle x_4' &= \alpha_{41}x_1 + \alpha_{42}x_2 + \alpha_{43}x_3 + \alpha_{44}x_4.
\end{aligned}
$$

Die Coordinaten der Grundpunkte $abcd$ und des EP e von S sind also im Systeme S':

$$
\alpha_{11}|\alpha_{21}|\alpha_{31}|\alpha_{41},\quad \alpha_{12}|\alpha_{22}|\alpha_{32}|\alpha_{42},\quad \alpha_{13}|\alpha_{23}|\alpha_{33}|\alpha_{43},\quad \alpha_{14}|\alpha_{24}|\alpha_{34}|\alpha_{44},
$$
$$
\sum \alpha_{1i} \,|\, \sum \alpha_{2i} \,|\, \sum \alpha_{3i} \,|\, \sum \alpha_{4i} \quad (i = 1, 2, 3, 4).
$$

Was die Transformation der linearen Ebenencoordinaten im Raume anbelangt, so braucht nur auf A in § 8 verwiesen zu werden.

Wir gehen jetzt von einem Systeme S von homogenen linearen Punkt-, Ebenen- und Liniencoordinaten zu einem

Systeme S' ebensolcher Coordinaten über. Die Transformation der Punktcoordinaten geschehe durch (94) bez. (95), die eingeführten Bezeichnungen werden beibehalten und ausserdem die Grundebenen und die EE in S mit $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$, in S' mit $\alpha'\beta'\gamma'\delta'\varepsilon'$ bezeichnet. Die Ebene u besitze die Coordinaten $u_1 | u_2 | u_3 | u_4$ in S, $u_1' | u_2' | u_3' | u_4'$ in S'. Dann ist wegen (94) und (84)

$$u_x = x_1'(a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + \cdots) + x_2'(a_{21}u_1 + \cdots) + x_3'(a_{31}u_1 + \cdots) + x_4'(a_{41}u_1 + \cdots) = u'_{x'},$$

also muss

$$(96) \qquad \begin{aligned} u_1' &= a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + a_{13}u_3 + a_{14}u_4, \\ u_2' &= a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + a_{23}u_3 + a_{24}u_4, \\ u_3' &= a_{31}u_1 + a_{32}u_2 + a_{33}u_3 + a_{34}u_4, \\ u_4' &= a_{41}u_1 + a_{42}u_2 + a_{43}u_3 + a_{44}u_4 \end{aligned}$$

genommen werden.

Diese lineare Substitution ist die transponirte der Substitution (94) und führt von den Ebenencoordinaten in S' zu denen in S, während man mittelst (94) von den Punktcoordinaten in S zu denen in S' gelangt.

Aus (96) folgt

$$(97) \qquad \begin{aligned} \triangle u_1 &= \alpha_{11}u_1' + \alpha_{21}u_2' + \alpha_{31}u_3' + \alpha_{41}u_4', \\ \triangle u_2 &= \alpha_{12}u_1' + \alpha_{22}u_2' + \alpha_{32}u_3' + \alpha_{42}u_4', \\ \triangle u_3 &= \alpha_{13}u_1' + \alpha_{23}u_2' + \alpha_{33}u_3' + \alpha_{43}u_4', \\ \triangle u_4 &= \alpha_{14}u_1' + \alpha_{24}u_2' + \alpha_{34}u_3' + \alpha_{44}u_4'. \end{aligned}$$

Man erkennt aus (96), dass die Ebenen $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ im Systeme S' die Coordinaten

$$a_{11}|a_{21}|a_{31}|a_{41}, \quad a_{12}|a_{22}|a_{32}|a_{42}, \quad a_{13}|a_{23}|a_{33}|_{43}, \quad a_{14}|a_{24}|a_{34}|a_{44},$$
$$\sum a_{1i} \,|\, \sum a_{2i} \,|\, \sum a_{3i} \,|\, \sum a_{4i} \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

haben; diejenigen der Ebenen $\alpha'\beta'\gamma'\delta'\varepsilon'$ im Systeme S sind nach (97)

$$\alpha_{11}|\alpha_{12}|\alpha_{13}|\alpha_{14}, \quad \alpha_{21}|\alpha_{22}|\alpha_{23}|\alpha_{24}, \quad \alpha_{31}|\alpha_{32}|\alpha_{33}|\alpha_{34}, \quad \alpha_{41}|\alpha_{42}|\alpha_{43}|\alpha_{44},$$
$$\sum \alpha_{i1} \,|\, \sum \alpha_{i2} \,|\, \sum \alpha_{i3} \,|\, \sum \alpha_{i4} \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Wir wollen nunmehr die homogenen linearen Coordinaten einer Geraden des Raumes in S mit $p_{12} | p_{13} | \ldots$, in S' mit $p'_{12} | p'_{13} | \ldots$ bezeichnen.

Liegen an dieser Geraden die Punkte xy, die Ebenen uv und bezeichnen wir allgemein die Coordinaten von x in S mit $x_1 \mid x_2 \mid x_3 \mid x_4$ u. s. w., wie oben, so können wir geradezu

$$p_{ik} = x_i y_k - x_k y_i, \quad p'_{ik} = x'_i y'_k - x'_k y'_i,$$
$$\pi_{ik} = u_i v_k - u_k v_i, \quad \pi'_{ik} = u'_i v'_k - u'_k v'_i$$

setzen, wo zwischen den p_{ik} und π_{ik}, den p'_{ik} und π'_{ik} die Relation (56) besteht.

Dann ist wegen (94), wie die in **58** ausgeführte Rechnung zeigt,

$$(98) \quad p_{ik} = a_{12}^{(ik)} p'_{12} + a_{13}^{(ik)} p'_{13} + a_{14}^{(ik)} p'_{14} + a_{34}^{(ik)} p'_{34} + a_{42}^{(ik)} p'_{42} + a_{23}^{(ik)} p'_{23},$$

wenn die a. a. O. eingeführte Bezeichnung beibehalten wird.

Ferner wird wegen (96) in Folge einer analogen Rechnung

$$(99) \quad \pi'_{ik} = a_{ik}^{(34)} \pi_{34} + a_{ik}^{(42)} \pi_{42} + a_{ik}^{(23)} \pi_{23} + a_{ik}^{(12)} \pi_{12} + a_{ik}^{(13)} \pi_{13} + a_{ik}^{(14)} \pi_{14}.$$

Durch (98) berechnet man die p_{ik} aus den p'_{ik}, durch (99) die p'_{ik} aus den p_{ik} wegen (56)

Diejenige Gerade, welche die Ecken $u'_i = 0$, $u'_k = 0$ ($i, k = 1, 2, 3, 4$, i nicht gleich k) des Fundamentaltetraeders $a'b'c'd'$ in S' verbindet, hat in S nach (98) die Coordinaten

$$a_{ik}^{(12)} \mid a_{ik}^{(13)} \mid a_{ik}^{(14)} \mid a_{ik}^{(34)} \mid a_{ik}^{(42)} \mid a_{ik}^{(23)}.$$

Die Gerade, in welcher sich die Ebenen $x_i = 0$, $x_k = 0$ des Fundamentaltetraeders $\alpha\beta\gamma\delta$ von S schneiden, hat in S' nach (99) die Coordinaten

$$a_{34}^{(ik)} \mid a_{42}^{(ik)} \mid a_{23}^{(ik)} \mid a_{12}^{(ik)} \mid a_{13}^{(ik)} \mid a_{14}^{(ik)}.$$

Durch die Transformationsformeln (94)—(99) wird der Uebergang von linearen räumlichen Coordinaten zu ebensolchen ausgeführt; die Bedeutung der Substitutionscoefficienten ist vollständig dargelegt.

Man beweise mittelst der Formeln (94) und (96) direkt die Unabhängigkeit des DV (83) von vier Ebenen bez. Punkten vom linearen Coordinatensysteme; dass der Ausdruck u_x vom linearen Coordinatensysteme unabhängig ist, geht aus Obigem unmittelbar hervor. —

Abscissen, rechtwinklige ebene oder räumliche Coordinaten sind, wie früher gezeigt wurde, besondere lineare Coordinaten.

Wenn wir also in der Geraden von Abscissen zu Abscissen (**4**) oder auch zu linearen Coordinaten (§ 2) übergehen, so haben wir *besondere Fälle von der Transformation der homogenen (binären) linearen Coordinaten* vor uns. Das Gleiche gilt bezüglich des Uebergangs von rechtwinkligen Coordinaten zu ebensolchen oder zu linearen (**15**, § 4, **34**, § 9).

Soll in einem Grundgebilde von einem linearen Coordinatensysteme nach einem zweiten, dessen Grundpunkte und EP im ersten gegeben sind, transformirt werden, so findet man die betreffenden Formeln genau wie in den Specialfällen S. 12, S. 37—38 und S. 82.

Wie wir sahen, sind das DV von vier Elementen, d. h. die Ausdrücke (70), (75) und (83) und der Ausdruck u_x, durch dessen Verschwinden die Incidenz von Elementen bedingt ist, unabhängig vom zufällig gewählten linearen Coordinatensysteme. Man sagt auf Grund dessen, dass die graphischen Eigenschaften einer Figur vom linearen Coordinatensysteme unabhängige oder durch lineare Coordinatentransformation unveränderliche Eigenschaften derselben seien.

§ 11. Projektive Grundgebilde erster Stufe.

63. Wir betrachten zwei einförmige Grundgebilde g und g'; in jedem derselben führen wir lineare Coordinaten ein und verstehen allgemein unter $x_1 | x_2$ homogene Coordinaten eines Elementes x von g, unter $x_1' | x_2'$ solche eines Elementes x' von g' in dem betreffenden linearen Systeme.

Vermöge der Gleichungen

$$(100) \qquad \begin{aligned} x_1' &= \alpha x_1 + \beta x_2, \\ x_2' &= \gamma x_1 + \delta x_2, \end{aligned}$$

wo die Constanten $\alpha\beta\gamma\delta$ so beschaffen seien, dass die Determinante

$$\triangle = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$$

nicht Null ist, entspricht jedem Elemente x von g ein Element x' von g'. Verschiedenen Elementen x und y von g

entsprechen in g' Elemente x' bez. y', die gleichfalls verschieden sind; denn es wird wegen (100)

$$(x'y') = \triangle(xy). \tag{101}$$

Durch die linearen Gleichungen (100) werden demnach den Elementen von g diejenigen von g' in ganz bestimmter Weise eindeutig zugeordnet.

Aus (100) folgt

$$\begin{aligned} \triangle x_1 &= \delta x_1' - \beta x_2', \\ \triangle x_2 &= -\gamma x_1' + \alpha x_2'. \end{aligned} \tag{102}$$

Vermöge dieser Gleichungen entspricht jedem Elemente x' in g' ein Element x in g. Diese eindeutige Zuordnung ist die umgekehrte (inverse) von (100). Die Zuordnung (100) wird deshalb eine eindeutig umkehrbare genannt.

Von den Grundgebilden erster Stufe g und g' sagt man, dass sie durch die Gleichungen (100) bez. (102) eindeutig aufeinander bezogen seien; einander entsprechende Elemente heissen homolog.

Der Zusammenhang zwischen den Coordinaten homologer Elemente bleibt auch dann ein linearer, wenn man in den Grundgebilden zu anderen Systemen von DV-Coordinaten übergeht (**11, 60**). Die betrachtete eindeutige Beziehung wird daher auch eine lineare Beziehung oder eine lineare Verwandtschaft genannt.

Die lineare Verwandtschaft

$$\begin{aligned} x_1' &= \alpha' x_1 + \beta' x_2, \\ x_2' &= \gamma' x_1 + \delta' x_2 \end{aligned}$$

ist mit (100) dann und nur dann einerlei, wenn die Proportion

$$\alpha : \beta : \gamma : \delta = \alpha' : \beta' : \gamma' : \delta'$$

besteht (**10**).

Mit Rücksicht auf das in **11** über lineare Zusammenhänge Ausgeführte hat man die Sätze:

a. *Sind zwei einförmige Grundgebilde linear auf ein drittes bezogen, so sind sie unter sich linear verwandt.*

b. *Jede lineare Beziehung zwischen zwei einförmigen Grundgebilden lässt sich durch eine Folge beliebig vieler linearer Beziehungen zwischen ebensolchen ersetzen.*

64. Die lineare Beziehung, welche durch die Gleichungen (100) zwischen den Grundgebilden g und g' hergestellt wird, können wir noch in anderer Form darstellen. Aus den Gleichungen (100) folgt nämlich die Gleichung

$$\gamma x_1 x_1' - \alpha x_1 x_2' + \delta x_2 x_1' - \beta x_2 x_2' = 0,$$

welche mit jenen gleichwerthig ist. Setzen wir

$$\gamma = a_{11}, \quad -\alpha = a_{12}, \quad \delta = a_{21}, \quad -\beta = a_{22},$$

so wird dieselbe zu

$$(103) \qquad \sum a_{ik} x_i x_k' = 0 \ (i, k = 1, 2)$$

und

$$\triangle = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}.$$

Die linke Seite der Gleichung (103) ist in den Veränderlichen $x_1 | x_2$ sowohl als in den Veränderlichen $x_1' | x_2'$ linear und homogen; sie heisst daher eine bilineare (binäre) Form, die Gleichung eine bilineare (binäre) Gleichung. Im vorliegenden Falle wird die Determinante $\triangle$ der bilinearen Form von Null verschieden vorausgesetzt. Umgekehrt ist durch jede solche Gleichung eine lineare Beziehung zwischen unseren Grundgebilden gegeben.

Die linearen Verwandtschaften

$$\sum a_{ik} x_i x_k' = 0, \quad \sum a_{ik}' x_i x_k' = 0 \ (i, k = 1, 2)$$

sind dann und nur dann einerlei, wenn

$$a_{11} : a_{12} : a_{21} : a_{22} = a_{11}' : a_{12}' : a_{21}' : a_{22}'$$

ist (**63**).

65. Bei der linearen Beziehung (100) seien aa', bb', cc', dd' homologe Elemente. Dann ist

$$(a'c') = \triangle(ac), \quad (b'd') = \triangle(bd)$$

u. s. w., also

$$\frac{(a'c')(b'd')}{(a'd')(b'c')} = \frac{(ac)(bd)}{(ad)(bc)}$$

oder nach **46**

$$(a'b'c'd') = (abcd).$$

In Worten:

c. *Stehen zwei einförmige Grundgebilde in linearer Beziehung, so ist das DV von vier Elementen des einen gleich dem DV der homologen Elemente des anderen Grundgebildes.*

Behalten aa', bb', cc' ihre Bedeutung, so ist durch die Gleichung

$$\frac{(a'c')(b'x')}{(a'x')(b'c')} = \frac{(ac)(bx)}{(ax)(bc)}$$

oder

$$(104) \quad (a'c')(bc)(ax)(b'x') - (ac)(b'c')(a'x')(bx) = 0$$

eine lineare Beziehung gegeben, welche mit (100) einerlei ist. In der That wird nach (104) für $x = a$, $x' = a'$, für $x = b$, $x' = b'$; für $x = c$ hat man zunächst

$$(a'c')(b'x') - (b'c')(a'x') = 0,$$

ferner nach der Identität S. 9

$$(c'x') = 0,$$

also $x' = c'$. Nach dem Satze c erfüllen aber auch die Coordinaten von irgend zwei anderen homologen Elementen der Beziehung (100) die Gleichung (104), die Beziehungen sind also einerlei und somit ist nach **64**

$$\varrho \sum a_{ik} x_i x_k' = (ac)(b'c')(bx)(a'x') - (a'c')(bc)(b'x')(ax),$$

wo ϱ eine endliche, von Null verschiedene Zahl bedeutet.

Diese Darstellung (104) unserer Beziehung (100) ist dadurch bemerkenswerth, dass in ihr als Constante nur die Coordinaten von drei Paar homologen Elementen auftreten, und zwar ist die Gleichung (104) sowohl in den $a_1 | a_2$ als in den $a_1' | a_2'$ u. s. w. homogen. Dadurch sind wir zu dem Satze gelangt:

d. *Ordnet man irgend drei Elementen abc eines einförmigen Grundgebildes die Elemente $a'b'c'$ eines anderen bez. zu, so giebt es eine und nur eine lineare Beziehung, bei welcher aa', bb', cc' homologe Elemente sind.*

Die so bestimmte Beziehung soll mit $[abc,\ a'b'c']$ bezeichnet werden.

Sind $a''b''c''$ drei Elemente eines weiteren einförmigen Grundgebildes, so kann die lineare Beziehung $[abc,\ a'b'c']$ durch die Verbindung der beiden linearen Beziehungen $[abc,\ a''b''c'']$ und $[a''b''c'',\ a'b'c']$ ersetzt werden.

66. Aus dem letzten Satze geht hervor, dass lineare Beziehungen zwischen Grundgebilden g und g' verschiedener

Art auftreten können, bei welcher drei Elemente des einen an den homologen Elementen des anderen liegen. Ueber solche Beziehungen gilt der Satz:

e. *Liegen bei einer linearen Verwandtschaft zwischen zwei einförmigen Grundgebilden verschiedener Art dreimal homologe Elemente aneinander, so ist dies stets der Fall.*

Denn entsprechen z. B. den Strahlen $abcd$ eines Büschels g die Punkte $a'b'c'd'$ einer geraden Punktreihe g' und es liegen aa', bb', cc' aneinander, so ist, wenn an dem Strahle d der Punkt d_1' von g' liegt, einerseits nach Satz c oben

$$(a'b'c'd') = (abcd),$$

andererseits nach Satz r in **45**

$$(a'b'c'd_1') = (abcd),$$

also

$$(a'b'c'd') = (a'b'c'd_1')$$

und somit $d' = d_1'$. Analog behandelt man die übrigen Fälle.

Sind zwei einförmige Grundgebilde linear so aufeinander bezogen, dass homologe Elemente stets aneinander liegen, so sagt man sie seien perspektiv (aufeinander bezogen).

Stehen zwei Strahlenbüschel mit derselben Punktreihe oder demselben Ebenenbüschel, zwei Punktreihen mit demselben Strahlenbüschel, zwei Ebenenbüschel mit demselben Strahlenbüschel in perspektiver Beziehung, so sind jedesmal die beiden Grundgebilde linear aufeinander bezogen (Satz a). *Jede dieser Beziehungen heisst ebenfalls eine perspektive.*

Theile perspektiver Grundgebilde heissen ebenfalls perspektiv (perspektive Figuren) oder in perspektiver Lage befindlich.

Wie aus vorstehenden Erklärungen hervorgeht, ist der Begriff perspektiv hinsichtlich der drei Reciprocitätsgesetze sich selbst reciprok.*)

Gehört der Punkt o der Punktreihe $abcd$ nicht an, so liegen diese Punktreihe und das Strahlenbüschel oa, ob, oc, $od\ldots$ perspektiv. Schneidet die Gerade oo' nicht den Träger

*) Dasselbe gilt bezüglich aller noch einzuführenden graphischen Begriffe.

jener Punktreihe, so liegt dieselbe perspektiv zu dem Ebenenbüschel $oo'a$, $oo'b$, $oo'c$, $oo'd$, ...; dabei ist

$$(abcd) = o(abcd) = o'(abcd) = oo'(abcd).$$

Das Ebenenbüschel liegt perspektiv zu dem Strahlenbüschel oa, ob, ... und zu dem Strahlenbüschel $o'a$, $o'b$ .... Diese beiden Strahlenbüschel liegen perspektiv derart, dass sie gleichzeitig zu einer Punktreihe und zu einem Ebenenbüschel perspektiv sind.

Perspektive Strahlenbüschel an derselben Ebene sind nur zu einer Punktreihe, solche in demselben Bündel nur zu einem Ebenenbüschel perspektiv.

Perspektive Ebenenbüschel sind concentrische Figuren.

Perspektive Punktreihen abc ... und $a'b'c'$ ... liegen an einer Ebene; die Geraden aa', bb', cc' ... bilden ein Strahlenbüschel, dessen Scheitel o heisse. Man sagt von den Punkten einer dieser Reihen, etwa von den Punkten abc ..., dass sie aus dem Punkte o auf den Träger der anderen Reihe nach den Punkten $a'b'c'$ projicirt seien. Die Punktreihe $a'b'c'$ ... heisst eine Projektion der Punktreihe abc ..., a' die Projektion von a, b' von b u. s. w. Die Construktion — dieses Wort in erweitertem Sinne gebraucht —, welche von einer Punktreihe zu einer perspektiven führt, bezeichnet man ebenfalls als Projektion.

67. Wir können jetzt den Satz beweisen:

f. *Sind aa', bb', cc' drei Paar homologe Elemente bei einer linearen Beziehung zwischen einförmigen Grundgebilden, so ist diese Beziehung eine perspektive, wenn die Figuren abc und $a'b'c'$ perspektiv sind.*

Für Grundgebilde verschiedener Art ist dieser Satz mit dem Satze e einerlei; bei Grundgebilden derselben Art können wir die gegebene Beziehung durch zwei perspektive Beziehungen obigen Erklärungen gemäss so ersetzen, dass sich das Behauptete wieder mittelst des Satzes e ergiebt.

Aus dem Satze f folgern wir weiter:

g. *Sind zwei an derselben Ebene liegende Punktreihen linear so aufeinander bezogen, dass ihr gemeinsamer Punkt sich selbst entspricht, so ist die Beziehung eine perspektive.*

Denn entsprechen den Punkten abc der einen die Punkte $a'b'c'$ der anderen Reihe, und es ist $a = a'$, so liegen abc und $a'b'c'$ perspektiv, die Beziehung ist also eine perspektive.

Aus diesem Satze erhält man durch Anwendung der Gesetze A, B und D in § 8 drei weitere Sätze, welche man selbst aussprechen wolle.

Stehen von den Grundgebilden $gg'g'' \dots g^{(n)}$ je zwei aufeinanderfolgende in perspektiver Beziehung, so ist g auf $g^{(n)}$ linear bezogen (Satz a), ohne dass im Allgemeinen diese Beziehung perspektiv wird. Das eben Gesagte lässt sich umkehren:

h. *Jede lineare Beziehung zwischen zwei einförmigen Grundgebilden kann durch eine Folge von perspektiven Beziehungen ersetzt werden.*

Es seien z. B. zwei Punktreihen $abc \dots$ und $a'b'c'$ an den Trägern g und g' linear aufeinander bezogen, aa', bb', cc', ... homologe Punkte. Haben g und g' einen Punkt gemein, so sei a' von ihm verschieden. Wir nehmen nun auf der Geraden aa' einen von a und a' verschiedenen Punkt o beliebig an, projiciren alsdann aus o die Punktreihe $abc \dots$ auf eine durch a' gehende (von g' verschiedene) Grade g'' nach den Punkten $a'b''c'' \dots$ und ersetzen nun die gegebene Beziehung $[abc, a'b'c']$ durch die beiden linearen Beziehungen $[abc, a'b''c'']$ und $[a'b''c'', a'b'c']$; dieselben sind perspektive Beziehungen (Satz f und g). Analog behandelt man die übrigen Fälle oder man führt sie auf diesen zurück.

Wir haben eben zwischen die Punktreihen $abc \dots$ und $a'b'c'$ eine Punktreihe $a'b''c'' \dots$ eingeschoben, welche zu den beiden anderen perspektiv war. Bezeichnen wir noch den Schnittpunkt der Geraden $b'b''$, $c'c''$, ... mit o', so kann man sagen, dass der Uebergang von der Punktreihe $abc \dots$ zur Punktreihe $a'b'c' \dots$ durch zweimalige Projektion, nämlich aus o und aus o' bewerkstelligt werden könne.

Kann man von einer Punktreihe zu einer anderen durch wiederholte Projektion gelangen, so heissen die Punktreihen projektiv.

Die Punktreihen $abc \dots$ und $a'b'c' \dots$ sind demnach projektiv.

Man nennt ferner auch irgend zwei einförmige Figuren projektiv, wenn sie perspektiv sind oder wenn man eine Reihe von einförmigen Figuren so zwischen sie einschieben kann, dass je zwei aufeinanderfolgende Figuren perspektiv sind.

Wegen Satz h können wir jetzt sagen:

i. *Homologe Figuren in linear aufeinander bezogenen einförmigen Grundgebilden sind projektiv.*

Auf Grund dieses Satzes bezeichnet man die lineare Verwandtschaft auch als projektive Verwandtschaft (Projektivität). Für „projektiv verwandt" sagt man auch kurz „projektiv".

Sind die einförmigen Figuren $abcd$ und $a'b'c'd'$ projektiv, so ist $(abcd) = (a'b'c'd')$, und umgekehrt (Satz c und d).

68. Verstehen wir unter g und g' in **63** ein und dasselbe Grundgebilde $g = g'$, so wird durch (100) jedem Elemente x von g ein Element x' von g zugeordnet; das Grundgebilde wird linear auf sich selbst bezogen. Dabei können wir der Einfachheit halber die Coordinaten $x_1|x_2$ und $x_1'|x_2'$ als demselben Coordinatensysteme angehörig betrachten (S. 96).

Es sei z. B. g eine gerade Punktreihe am Träger t; durchläuft x die Gerade t, so gilt dasselbe von x'. Jeder Punkt der Reihe spielt eine doppelte Rolle, da man seine Coordinaten sowohl dem Systeme der Veränderlichen $x_1|x_2$ als dem der $x_1'|x_2'$ zuzählen kann. Dieses führt zur Vorstellung, dass an demselben Träger t zwei Punktreihen aufeinanderliegen*); indem man einen Punkt $x = y'$ als zur Punktreihe g gehörig betrachtet, ordnet man ihm vermöge (100) einen Punkt x' von g' zu; betrachtet man ihn als Punkt y' der Reihe g', so entspricht ihm vermöge (102) ein Punkt y von g. Dabei wird im Allgemeinen x' von y verschieden sein (§ 15).

Analog spricht man von aufeinanderliegenden Strahlen- oder Ebenenbüscheln.

Die Sätze a b c d h i gelten auch für aufeinanderliegende einförmige Grundgebilde. Ferner gilt hier der Satz:

k. *Liegen zwei projektive einförmige Grundgebilde aufeinander und es fallen drei Elemente des einen mit den homologen*

*) Analog spricht man von drei, vier, ... n an demselben Träger liegenden Punktreihen.

des anderen bez. zusammen, so fallen je zwei homologe Elemente zusammen.

Denn sind die einförmigen Figuren $abcd\ldots$ und $a'b'c'd'\ldots$ projektiv, ist $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$, so wird nach Satz b oben

$$(abcd) = (a'b'c'd') = (abcd'),$$

mithin $d = d'$.

Im Falle, den Satz k behandelt, heisst die Beziehung eine identische. Man sagt dann auch, dass die beiden aufeinanderliegenden projektiven Grundgebilde alle Elemente entsprechend gemein haben.

Die Punktreihen $abcd$, $badc$, $cdab$, $dcba$ sind projektiv nach (13).

Es fragt sich schliesslich, wieviele Elemente projektive einförmige Grundgebilde, die an demselben Träger liegen, im Allgemeinen entsprechend gemein haben. Um dieses zu ermitteln setzt man in (103)

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{x_1'}{x_2'},$$

und erhält dann eine quadratische Gleichung für $\frac{x_1}{x_2}$. Also:

l. *Liegen projektive einförmige Grundgebilde aufeinander, so haben dieselben im Allgemeinen zwei Elemente entsprechend gemein.*

Diese Elemente heissen auch Doppelelemente oder tautologe*) Elemente der Projektivität.

Die homogene (binäre) lineare Substitution erhält durch die Ausführungen in § 10 und § 11 verschiedene geometrische Bedeutung; sie vermittelt einmal den Uebergang von linearen Coordinaten in einförmigen Grundgebilden zu ebensolchen (§ 10), insbesondere von Abscissen zu linearen Coordinaten in der Geraden (§ 2), andererseits führt dieselbe von einem einförmigen Grundgebilde zu einem projektiven (§ 11).

§ 12. **Collineare Grundgebilde zweiter Stufe.**

69. Wir ziehen *zwei ebene Systeme (Ebenen)* E und E' in Betracht, führen in beiden lineare Coordinaten ein und verstehen dann allgemein unter $x_1 | x_2 | x_3$, $u_1 | u_2 | u_3$ homogene lineare Coordinaten eines Punktes x bez. einer Geraden u von

*) Baltzer, Analyt. Geom. Leipzig 1882, S. 11.

E, unter $x_1'|x_2'|x_3'$, $u_1'|u_2'|u_3'$ solche eines Punktes x' bez. einer Geraden u' von E'. Dabei können wir uns, in Folge ähnlicher Vorstellungen, wie vorhin bei einförmigen Grundgebilden, in den nachstehenden Ausführungen *die beiden Ebenen aufeinanderliegend* denken; die x_i, x_i', u_i, u_i' können dann am einfachsten als demselben Coordinatensysteme angehörig betrachtet werden.

Durch die linearen Gleichungen

$$(105) \qquad x_i' = a_{1i}x_1 + a_{2i}x_2 + a_{3i}x_3 \quad (i = 1, 2, 3),$$

deren Determinante $\triangle = \sum \pm a_{11}\,a_{22}\,a_{33}$ nicht Null sei, wird jedem Punkte x von E ein Punkt x' von E' zugeordnet und umgekehrt. Denn setzen wir in $\triangle$

$$\text{adj } a_{ik} = \alpha_{ik},$$

so folgt aus (105)

$$(106) \qquad \triangle x_i = \alpha_{i1}x_1' + \alpha_{i2}x_2' + a_{i3}x_3' \cdot (i = 1, 2, 3).$$

Componirt man diese Gleichungen mit $u_1|u_2|u_3$, so kommt

$$\triangle (u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3) = x_1'(\alpha_{11}u_1 + \cdots) + x_2'(\alpha_{12}u_1 + \cdots) \\ x_3'(\alpha_{13}u_1 + \cdots)$$

oder, wenn wir

$$(107) \qquad \triangle u_i' = \alpha_{1i}u_1 + \alpha_{2i}u_2 + \alpha_{3i}u_3 \quad (i = 1, 2, 3)$$

setzen,

$$u_x = u'_{x'}.$$

Bewegt sich der Punkt x auf einer Geraden u der Ebene E, ist also $u_x = 0$, so verschwindet auch $u'_{x'}$, d. h. der dem Punkte x vermöge (105) entsprechende Punkt x' durchläuft eine Gerade u' in der Ebene E', deren Coordinaten $u_1'|u_2'|u_3'$ durch die Gleichungen (107) gegeben sind; aus letzteren folgt

$$(108) \qquad u_i = a_{i1}u_1' + a_{i2}u_2' + a_{i3}u_3' \quad (i = 1, 2, 3).$$

In Folge der Gleichungen (105) entspricht mithin auch jeder Geraden u von E eine Gerade u' von E' und umgekehrt. Diese Zuordnungen sind durch die Gleichungen (107) und (108) gegeben.

Einander entsprechende Elemente in E und E' heissen **homolog**. Der Zusammenhang zwischen den Coordinaten homologer Elemente bleibt auch dann ein linearer, wenn man in den Ebenen E und E' zu anderen DV-Coordinaten über-

geht (**11, 61**). Die zwischen den beiden Ebenen durch die Gleichungen (105) hergestellte eindeutige Beziehung wird deshalb eine lineare Beziehung (Verwandtschaft) genannt. Dieselbe heisst auch eine collineare Beziehung oder eine Collineation, weil Punkten der einen Ebene, welche in gerader Linie liegen, in der anderen Ebene Punkte entsprechen, für welche das Gleiche gilt. Homologe Figuren heissen ebenfalls collinear.

Die Collineationen

$$x_i' = a_{1i}x_1 + a_{2i}x_2 + a_{3i}x_3\,,\ x_i' = b_{1i}x_1 + b_{2i}x_2 + b_{3i}x_3$$

sind dann und nur dann einerlei, wenn

$$a_{11} : a_{12} : a_{13} : \cdots = b_{11} : b_{12} : b_{13} : \cdots$$

nach **10.**

Nach Obigem gilt der Satz:

a. *Bei einer collinearen Beziehung zwischen den zwei Ebenen E und E' entsprechen aneinanderliegenden Elementen der einen Ebene ebensolche der anderen Ebene.*

Einer geraden Punktreihe in E entspricht eine ebensolche in E', einem Strahlenbüschel in E ein Strahlenbüschel in E'. Dieses geht übrigens auch daraus hervor, dass für drei Paar homologe Punkte aa', bb', cc' wegen (105)

$$(a'b'c') = \triangle(abc),$$

für drei Paar homologe Gerade uu', vv', ww' wegen (108)

$$(uvw) = \triangle(u'v'w')$$

ist.

Jeder aus gewissen Punkten und Geraden zusammengesetzten Figur der einen Ebene entspricht in der anderen Ebene eine homologe, d. i. aus den homologen Elementen bestehende collineare Figur.

Dem Punkte $\varkappa a_1 + \lambda b_1 | \varkappa a_2 + \lambda b_2 | \varkappa a_3 + \lambda b_3$ einer Geraden ab von E entspricht bei unserer Collineation (105) der Punkt $\varkappa a_1' + \lambda b_1' | \varkappa a_2' + \lambda b_2' | \varkappa a_3' + \lambda b_3'$ der zu ab homologen Geraden $a'b'$ von E'; $\varkappa | \lambda$ sind homogene DV-Coordinaten in der Geraden ab bez. $a'b'$ (**30**). Also haben wir nach § 11 den Satz (B in § 8):

b. *Bei einer collinearen Beziehung zwischen zwei Ebenen sind homologe einförmige Grundgebilde projektiv.*

Aus a und b folgt sofort wegen **52**:

c. *Collineare Planfiguren haben alle graphischen Eigenschaften gemein.*

70. Bei der Collineation (105) hat der zum Punkte x homologe Punkt die Gleichung

$$\sum a_{ik} x_i u_k' = 0 \quad (i, k = 1, 2, 3) \tag{109}$$

in Liniencoordinaten $u_1' | u_2' | u_3'$; links steht eine bilineare ternäre Form der Veränderlichen $x_1 | x_2 | x_3$ und $u_1' | u_2' | u_3'$; ihre Determinante Δ wird hier von Null verschieden vorausgesetzt.

Die Zuordnung (105) ist also auch in der Form einer bilinearen Gleichung (109) darstellbar; die umgekehrte ist durch die bilineare Gleichung

$$\sum \alpha_{ik} x_k' u_i = 0 \quad (i, k = 1, 2, 3) \tag{110}$$

gegeben, auf deren linker Seite die zu $\sum a_{ik} x_i u_k'$ adjungirte Form steht.

Die Gleichungen (107) und (108) können durch die Gleichungen (110) bez. (109) ersetzt werden, so dass die Collineation durch die beiden letzten Gleichungen vollständig dargestellt wird.

Wir wollen jetzt die Collineation (105) durch eine bilineare Gleichung darstellen, in welcher als Constante nur die Coordinaten von vier Paar homologen Punkten aa', bb', cc', dd' auftreten, welche beliebig aber so gewählt seien, dass weder abc noch abd u. s. w. in gerader Linie liegen. Zunächst ist nach (105)

$$\begin{aligned} a_k' &= a_{1k} a_1 + a_{2k} a_2 + a_{3k} a_3, \\ b_k' &= a_{1k} b_1 + a_{2k} b_2 + a_{3k} b_3, \\ c_k' &= a_{1k} c_1 + a_{2k} c_2 + a_{3k} c_3. \end{aligned}$$

Componirt man diese Gleichungen mit $(bc)_i$, $(ca)_i$, $(ab)_i$, so erhält man

$$(bc)_i a_k' + (ca)_i b_k' + (ab)_i c_k' = (abc) a_{ik}.$$

Also ist

$$(abc) \sum a_{ik} x_i u_k' = u_{a'}'(bcx) + u_{b'}'(cax) + u_{c'}'(abx).$$

Berücksichtigt man endlich die Gleichungen

$(a'b'd') = \triangle(abd)$, $(a'c'd') = \triangle(acd)$, $(b'c'd' = \triangle(bcd)$,

so erhält man die Collineation (105) in der gewünschten Form

$$(111)\ u'_{a'}(bcx)(b'c'd')(cda)(dab) + u'_{b'}(cax)(bcd)(c'd'a')(dab) + u'_{c'}(abx)(bcd)(cda)(d'a'b') = 0.$$

Diese Gleichung ist homogen in den a_i, b_i u. s. w. Die Determinante der bilinearen Form links ist

$$(a'b'c')(b'c'd')(c'd'a')(d'a'b')(abc)^2(bcd)^2(cda)^2(dab)^2.$$

Wir haben damit zugleich den Satz gewonnen:

d. *Ordnet man vier Punkten (Geraden) abcd einer Ebene, von denen keine drei in gerader Linie liegen (durch denselben Punkt gehen), vier ebensolche Punkte (Gerade) a'b'c'd' einer anderen Ebene zu, so giebt es eine und nur eine Collineation, welche aa', bb', cc', dd' zu homologen Elementen hat.*

Diese Collineation wird mit $[abcd,\ a'b'c'd']$ bezeichnet werden.

71. Liegen collinear verwandte (collineare) ebene Systeme aufeinander, so gilt der Satz:

e. *Im Allgemeinen haben aufeinanderliegende collineare ebene Systeme die Ecken und Seiten eines Dreiecks entsprechend gemein.*

Zur Bestimmung der Punkte, welche bei einer solchen Collineation (105) mit ihren homologen zusammenfallen — der Doppelpunkte (tautologen*) Punkte) der Collineation — hat man nämlich die Gleichungen

$$\varrho x_i = a_{1i}x_1 + a_{2i}x_2 + a_{3i}x_3 \ (i = 1, 2, 3).$$

Damit dieselben auflösbar sind, muss die Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11-\varrho} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22-\varrho} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33-\varrho} \end{vmatrix} = 0$$

sein. Wir haben eine cubische Gleichung für ϱ; ihr genügen im Allgemeinen drei verschiedene Werthe von ϱ und somit giebt es im Allg. drei Punkte abc der gesuchten Art. Dieselben liegen nicht in gerader Linie, da sonst jeder Punkt dieser Geraden mit seinem homologen zusammenfiele (Satz b

*) Bei Baltzer, l. c. § 30.

in § 12, Satz k in § 11). Es giebt, wie man analog zeigt, auch drei sich selbst entsprechende Gerade (Doppelgerade, tautologe Gerade): die Geraden bc, ca, ab.

f. *Haben zwei aufeinanderliegende collineare Ebenen vier Punkte (Gerade) $abcd$, von denen keine drei in einer Geraden liegen (durch einen Punkt gehen), entsprechend gemein, so haben dieselben alle ihre Elemente entsprechend gemein.*

Denn entspricht dem Punkte e der Punkt e', so ist $a(bcde) = a(bcde')$, also fallen die Geraden ae und ae' zusammen, ebenso be und be' u. s. w., also e und e'. U. s. w.

Diese Collineation heisst eine identische; ihre Gleichung lautet

$$u_1'x_1 + u_2'x_2 + u_3'x_3 = 0.$$

72. Man übertrage mittelst des Reciprocitätsgesetzes A den Inhalt der drei letzten Artikel auf zwei Bündel, alle Bezeichnungen beibehaltend.

Stehen zwei Bündel in collinearer Beziehung, so entspricht einem Strahle des einen ein Strahl des anderen, einer Ebene des einen eine Ebene des anderen Bündels, einem Strahlen- oder Ebenenbüschel des einen ein projektives Strahlen- bez. Ebenenbüschel im anderen. U. s. w.

Fassen wir endlich in **69** und **70** die x_i' und u_i' als lineare Coordinaten eines Strahles x' bez. einer Ebene u' eines Bündels S auf, während die x_i und u_i ihre Bedeutung behalten, so wird durch die Gleichungen (105) eine *lineare Verwandtschaft zwischen der Ebene E und dem Bündel S* hergestellt, welche folgende Eigenschaften besitzt:

Jedem Punkte x von E entspricht ein Strahl x' von S und umgekehrt. Durchläuft x eine Gerade u in E, so beschreibt der homologe Strahl x' ein Strahlenbüschel in S, das an der zu u homologen Ebene u' liegt. Einem Strahlenbüschel in E entspricht ein Ebenenbüschel in S. Homologe einförmige Grundgebilde sind projektiv. U. s. w.

Eine lineare Verwandtschaft der eben geschilderten Art soll ebenfalls eine collineare genannt werden.

Um eine collineare Beziehung zwischen einem Bündel S und einer Ebene E festzulegen, ordnet man vier Strahlen von

S, von denen keine drei einem Büschel angehören, vier Punkte von E, von denen keine drei in gerader Linie liegen, bez. zu. Vergl. Satz d oben.

Ueber collineare Grundgebilde zweiter Stufe gilt gemäss obigen Erklärungen nach **11** der Satz:

g. *Stehen zwei Grundgebilde zweiter Stufe mit demselben dritten in collinearer Beziehung, so sind sie unter sich collinear. — Jede Collineation kann durch eine Folge von beliebig vielen Collineationen ersetzt werden.*

73. Zwischen einer Ebene E und einem Bündel S, dessen Centrum nicht an E liegt, kann man eine *besondere Collineation* dadurch herstellen, dass man vier Punkten $abcd$ von E, von denen keine drei in gerader Linie liegen, die an ihnen liegenden Strahlen $a'b'c'd'$ von S bez. zuordnet.

Bei dieser Collineation $[abcd, a'b'c'd']$ liegen stets homologe Elemente aneinander. Denn entspricht dem Punkte e von E der Strahl e' von S, der E in e_1 trifft, so ist nach **72**

$$a(bcde) = a'(b'c'd'e'),$$

nach Satz q in **45**

$$a'(b'c'd'e') = a(bcde_1),$$

also

$$a(bcde) = a(bcde_1);$$

die Geraden ae und ae_1, ebenso be und be_1 u. s. w. fallen zusammen, also e und e_1; e' geht durch e. — Daraus ergiebt sich weiter, dass jede Gerade von E an der homologen Ebene von S liegt. Homologe einförmige Grundgebilde sind daher perspektiv.

Eine Beziehung dieser Art heisst eine perspektive Beziehung.

Stehen zwei (verschiedene) Ebenen mit demselben Bündel oder zwei (verschiedene) Bündel mit derselben Ebene in perspektiver Beziehung, so stehen jedesmal die beiden Grundgebilde in collinearer Beziehung; jede dieser collinearen Beziehungen wird gleichfalls perspektiv genannt. Homologe Figuren in perspektiven Grundgebilden heissen perspektiv.

Diese Erklärungen ziehen zum Theile diejenigen in **66** nach sich.

Es seien aa', bb', cc', ... homologe Punkte, $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$ ... homologe Gerade zweier perspektiven Planfiguren. Die Geraden aa', bb', cc', ... gehen durch einen Punkt o (Centrum der Perspektivität), durch den auch die Ebenen $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$, ... gehen. Homologe Gerade treffen sich in den Punkten einer Geraden. Von den Punkten und Geraden der einen Figur sagt man, dass sie aus dem Punkte o auf die Ebene der anderen Figur nach den homologen Punkten und Geraden der zweiten Figur projicirt seien. Jede der beiden Figuren heisst eine Projektion der anderen, a' eine Projektion von a, α' von α u. s. w. Die Geraden aa', bb', ... heissen projicirende Strahlen, die Ebenen $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, ... projicirende Ebenen.

Liegen zwei centrische Figuren perspektiv, so treffen sich homologe Gerade und Ebenen in den Punkten und Geraden einer Planfigur; dieselbe heisst der perspektive Durchschnitt der beiden centrischen Figuren.

h. *Eine durch die Elementenpaare aa', bb', cc', dd' bestimmte Collineation ist perspektiv, wenn die Figuren $abcd$ und $a'b'c'd'$ perspektiv liegen.*

Dieser Satz wurde für eine Ebene und ein Bündel zu Anfange dieses Artikels bewiesen, die übrigen Fälle führt man mittelst des Satzes g auf jenen zurück.

74. Stehen von einer Reihe von Grundgebilden je zwei aufeinanderfolgende in perspektiver Beziehung, so stehen das erste und letzte in collinearer, im Allgemeinen nicht perspektiver, Beziehung (g). Umgekehrt:

i. *Jede collineare Beziehung zwischen Grundgebilden zweiter Stufe kann durch eine Folge von perspektiven Beziehungen ersetzt werden.*

Wir betrachten, um diesen Satz zu beweisen, zunächst zwei in verschiedenen Ebenen liegende collineare ebene Systeme E und E'; die gegebene Collineation sei durch die Punktepaare aa', bb', cc', dd' bestimmt. Die Geraden ab und cd mögen sich in e, $a'b'$ und $c'd'$ in e' schneiden, e' liege nicht in E. Aus einem von e und e' verschiedenen Punkte o der Geraden ee' projicire man das Viereck $abcd$ auf eine durch e' gehende, die Geraden $a'b'$ und $c'd'$ nicht enthaltende

Ebene nach dem Vierecke $a''b''c''d''$. Die Geraden $a'a''$ und $b'b''$ schneiden sich in einem Punkte o'. Aus o' projicire man $a''b''c''d''$ auf eine durch $a'b'$ gehende, von E' verschiedene Ebene nach $a'b'c'''d'''$. Aus dem Schnittpunkte o'' der Geraden $c'c'''$ und $d'd'''$ wird $a'b'c'''d'''$ nach $a'b'c'd'$ projicirt. Die gegebene Collineation $[abcd,\ a'b'c'd']$ ersetzt man durch die Verbindung der Collineationen $[abcd,\ a''b''c''d'']$, $[a''b''c''d'',\ a'b'c'''d''']$, $[a'b'c'''d''',\ a'b'c'd']$, die sämmtlich perspektiv sind (h), wodurch das Verlangte geleistet ist. — Die übrigen Fälle behandelt man analog oder führt sie auf diesen zurück.

k. *Collineare Figuren sind entweder perspektiv, oder es lassen sich zwischen dieselben (ebene, centrische) Figuren so einschieben, dass alsdann je zwei aufeinanderfolgende perspektiv sind (i).*

Von einer Planfigur kann man zu einer collinearen Planfigur durch wiederholte Projektion gelangen, wie wir oben sahen. Collineare Planfiguren heissen daher auch projektiv, eine Bezeichnung, die man auf collineare Figuren jeder Art überträgt. Die collineare Verwandtschaft zwischen Grundgebilden zweiter Stufe wird daher auch als projektive Verwandtschaft (Projektivität) bezeichnet.

Zwei projektive einförmige Grundgebilde können als homologe Theile von collinearen Grundgebilden zweiter Stufe nachgewiesen werden, wenn man den Fall ausnimmt, wo das eine ein Ebenenbüschel, das andere eine Punktreihe ist (Satz d in **65** und **70**), können also auch collinear genannt werden, eine Bezeichnung, die auch auf den eben ausgeschlossenen Fall übertragen wird. Projektive einförmige Figuren heissen auch collinear.

Der Satz k gilt für collineare Figuren jeder Art, ebenso die Umkehrung desselben.

75. Perspektiv werden auch genannt zwei n-Ecke (n-Seite) $a_1 a_2 \ldots a_n$ und $a_1' a_2' \ldots a_n'$ an *derselben* Ebene, wenn die Geraden (Punkte) $a_1 a_1'$, $a_2 a_2'$, $\ldots a_n a_n'$ durch einen Punkt gehen (in gerader Linie liegen).

Betrachten wir, um auf solche Figuren näher einzugehen, die Collineation, welche durch die bilineare Gleichuug

$$\varrho u_x' + \sigma u_p' \pi_x = 0$$

in einer Ebene hergestellt wird, wenn ihre Determinante nicht

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

$$[illegible]$$

[illegible]

$$[illegible]$$

$$[illegible]$$

[illegible]

$$[illegible]$$

[illegible]

[illegible] in § 4.

[illegible] Figuren in der Ebene [illegible]

Bündel) nicht immer collinear-perspektiv sind. Zwei perspektive Vierecke $abcd$ und $a'b'c'd'$ z. B. sind collinear, wenn abc u. s. w. nicht in gerader Linie liegen (Satz d oben), aber im Allgemeinen nicht collinear-perspektiv, da die Geraden ab und $a'b'$, ac und $a'c'$ u. s. w. sich im Allgemeinen nicht in Punkten einer geraden Linie treffen. *Aber perspektive Dreiecke sind stets collinear-perspektiv.* Denn gehen die Geraden aa', bb', cc' durch p, treffen sich ab und $a'b'$, bc und $b'c'$, ca und $c'a'$ bez. in $e\ f\ g$, so bestimmen der Punkt p, die Gerade $\pi = ef$ und das Paar aa' eine perspektive Beziehung, welche bb' und cc' zu homologen Punkten hat; also sind ac und $a'c'$ homologe Gerade, ihr Schnittpunkt g liegt an π, w. z. b. w. Dieses Resultat kann man auch so aussprechen (B):

1. *Liegen zwei Dreiecke abc und $a'b'c'$ so, dass die Geraden aa', bb', cc' durch einen Punkt gehen, so schneiden sich die Geraden bc und $b'c'$, ca und $c'a'$, ab und $a'b'$ bez. in Punkten einer Geraden, und umgekehrt (Satz des Desargues).*

Liegen abc und $a'b'c'$ in verschiedenen Ebenen, so ist dieser Satz an sich klar. Man spreche auch den reciproken centrischen Satz aus (A).

Satz h S. 110 gilt auch in der Ebene, wenn man am Schlusse „collinear-perspektiv“ für „perspektiv“ sagt.

Die Substitutionen in § 4, in **61** und in diesem Paragraphen stimmen überein. Dieselben homogenen (ternären) linearen Substitutionen dienen also einmal zum Uebergange von rechtwinkligen ebenen Coordinaten zu linearen (§ 4) oder, allgemeiner gesprochen, von einem Systeme linearer Coordinaten zu einem ebensolchen in der Ebene, sowie zur Transformation der linearen Coordinaten im Bündel (**61**), ein andermal stellen sie eine collineare Beziehung zwischen zwei Grundgebilden zweiter Stufe her.

§ 13. Collineare räumliche Systeme.

76. Wir verstehen im Folgenden allgemein unter $x_1|x_2|x_3|x_4$, $x_1'|x_2'|x_3'|x_4'$ homogene Coordinaten eines Punktes x bez. x', unter $u_1|u_2|u_3|u_4$, $u_1'|u_2'|u_3'|u_4'$ solche einer Ebene u bez. u' und unter $p_{12}|p_{13}|p_{14}|\ldots$, $p_{12}'|p_{13}'|p_{14}'|\ldots$ solche einer

Geraden p bez. p' in einem linearen räumlichen Coordinatensysteme.

Die homogenen Veränderlichen x_i und x_i' werden unten eine verschiedene Rolle spielen, ebenso die u_i und u_i', die p_{ik} und p_{ik}'; jedes Raumelement kommt doppelt in Betracht dadurch, dass seine Coordinaten zu den Veränderlichen x_i, u_i, p_{ik} oder zu den Veränderlichen x_i', u_i', p_{ik}' gerechnet werden können. Wir sprechen daher geradezu von zwei*) räumlichen Systemen (Räumen) R und R' (Grundgebilden dritter Stufe) und zwar von einem Elemente des Raumes R bez. R', je nachdem seine Coordinaten als zu dem Systeme der ungestrichenen bez. der gestrichenen Veränderlichen gehörig betrachtet werden.

Durch die Gleichungen

(112) $$x_i' = a_{1i}x_1 + a_{2i}x_2 + a_{3i}x_3 + a_{4i}x_4 \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

wird unter der Voraussetzung, dass die Determinante $\triangle = \sum \pm a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ nicht Null ist, jedem Punkte x des Raumes R ein Punkt x' des Raumes R' zugeordnet und umgekehrt; denn aus (112) folgt, wenn adj a_{ik} in $\triangle$ mit α_{ik} bezeichnet wird,

(113) $$\triangle x_i = \alpha_{i1}x_1' + \alpha_{i2}x_2' + \alpha_{i3}x_3' + \alpha_{i4}x_4' \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Componirt man die vier letzten Gleichungen mit $u_1|u_2|u_3|u_4$, so erhält man

(114) $$u_x = u_{x'}',$$

wenn

(115) $$\triangle u_i' = \alpha_{1i}u_1 + \alpha_{2i}u_2 + \alpha_{3i}u_3 + \alpha_{4i}u_4 \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

gesetzt wird.

Bewegt sich im Raume R der Punkt x an einer Ebene u, so ist $u_x = 0$, also nach (114) auch $u_{x'}' = 0$, d. h. der ihm vermöge (112) entsprechende Punkt x' bewegt sich im Raume R' an einer Ebene u', deren Coordinaten durch (115) gegeben sind. In dieser Weise entspricht jeder Ebene u in R eine Ebene u' in R' und umgekehrt. Die umgekehrte Zuordnung ist durch die aus (115) folgenden Gleichungen

(116) $$u_i = a_{i1}u_1' + a_{i2}u_2' + a_{i3}u_3' + a_{i4}u_4' \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

gegeben.

*) Analog von 3, 4, . . . n räumlichen Systemen.

Entsprechen vermöge (112) den Punkten xy und Ebenen uv des Raumes R die Punkte $x'y'$ und Ebenen $u'v'$ im Raume R', so ist bei $u_x = u_y = v_x = v_y = 0$ nach (114) auch $u'_{x'} = u'_{y'} = = v'_{x'} = v'_{y'} = 0$. Den Punkten und Ebenen, welche im Raume R an einer Geraden $xy = uv$ liegen, entsprechen mithin im Raume R' Elemente, von denen das Gleiche gilt, und umgekehrt. So entspricht jeder Geraden p von R eine Gerade p' von R' und umgekehrt. Man findet (vergl. **58**), wenn die dort eingeführte Bezeichnung beibehalten wird,

$$p'_{ik} = a_{12}^{(ik)} p_{12} + a_{13}^{(ik)} p_{13} + \cdots \tag{117}$$

und für die umgekehrte Zuordnung

$$\pi_{ik} = a_{ik}^{(34)} \pi'_{34} + a_{ik}^{(42)} \pi'_{42} + \cdots, \tag{118}$$

wo $p_{12} : p_{13} : \cdots = \pi_{34} : \pi_{42} \cdots$ u. s. w.

Durch die Gleichungen (112) wird also eine Beziehung zwischen zwei Räumen hergestellt, vermöge deren jedem Elemente des einen ein gleichartiges Element des anderen zugeordnet wird. Einander zugeordnete Elemente heissen homolog. Der Zusammenhang zwischen den Coordinaten homologer Elemente bleibt ein linearer, wenn wir andere DV-Coordinaten einführen (**11**, **62**).

Die zwischen den Räumen R und R' durch die Gleichungen (112) hergestellte eindeutige, lineare Beziehung heisst eine collineare, eine collineare Verwandtschaft oder Collineation, weil bei ihr Punkten, die in gerader Linie liegen, Punkte entsprechen, welche dieselbe Lage haben.

Man beachte, dass dieselben linearen Substitutionen in § 9, § 10 und hier eine verschiedene geometrische Bedeutung erhalten.

Die Collineation $x'_i = b_{1i}x_1 + b_{2i}x_2 + b_{3i}x_3 + b_{4i}x_4$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ ist mit (112) dann und nur dann einerlei, wenn die Proportion

$$a_{11} : a_{12} : a_{13} : \cdots = b_{11} : b_{12} : b_{13} \cdots$$

besteht (**10**).

Der Satz g in **72** gilt auch für collineare Räume.

77. Wir wollen jetzt eine räumliche Collineation (112) näher betrachten. Zunächst haben wir nach **76** den Satz:

a. *Sind zwei räumliche Systeme collinear, so entsprechen aneinanderliegenden Elementen des einen ebensolche im anderen.*

Einem Grundgebilde erster oder zweiter Stufe entspricht sonach ein Grundgebilde gleicher Art. Dies geht auch daraus hervor, dass für die homologen Punkte aa', bb', cc', dd' und Ebenen uu', vv', ww', tt' der Collineation (112)

(119) $$(a'b'c'd') = \triangle(abcd), \quad (uvwt) = \triangle(u'v'w't')$$

ist.

Man beweist ferner, analog wie Satz b bei Grundgebilden zweiter Stufe in **69**, den Satz:

b. *In collinearen räumlichen Systemen sind homologe Grundgebilde erster und zweiter Stufe collinear (projektiv).*

In collinearen Räumen sind homologe ebene und centrische Figuren collinear. Jeder räumlichen Figur entspricht eine homologe, d. h. aus den homologen Elementen bestehende collineare räumliche Figur. So oft in der einen Elemente aneinanderliegen, ist dies auch in der anderen bei den homologen Elementen der Fall (Satz a), und das DV von vier Elementen der einen Figur ist gleich dem der homologen Elemente in der anderen (Satz b). Also gilt der Satz:

c. *Collineare Figuren gleicher Art haben alle graphischen Eigenschaften gemein.*

78. Die Collineation (112) kann auch durch die bilineare Gleichung

(120) $$\sum a_{ik} x_i u_k' = 0 \quad (i, k = 1, 2, 3, 4)$$

dargestellt werden, auf deren linker Seite eine bilineare quaternäre Form der x_i und u_i' steht. Die Determinante $\triangle = \sum \pm a_{11} a_{22} a_{33} a_{44}$ der bilinearen Form muss hier von Null verschieden vorausgesetzt werden. Durch jede bilineare Gleichung dieser Art ist eine Collineation im Raume gegeben.

Die umgekehrte Zuordnung von (117) ist durch die bilineare Gleichung

(121) $$\sum \alpha_{ik} x_k' u_i = 0 \quad (i, k = 1, 2, 3, 4)$$

gegeben, wo links die zu $\sum a_{ik} x_i u_k'$ adjungirte Form steht.

Die bilineare Gleichung

(122) $$\sum a_{lm}^{(ik)} p_{lm} \pi_{ik}' = 0,$$

wo für ik, ebenso für lm die sechs Combinationen der Ziffern 1, 2, 3, 4 zu je zweien zu setzen sind, endlich ist diejenige

der zu einer Geraden p bez. p' homologen Geraden in Strahlencoordinaten π'_{ik} bez. p_{ik}.

Die Gleichungen (115) und (116) können durch (121) bez. (120) ersetzt werden. Die drei bilinearen Gleichungen (120) — (122) stellen die betrachtete Collineation vollständig dar.

Es seien aa', bb', cc', dd', ee' homologe Punkte derselben; weder $abcd$ noch $abce$ u. s. w. mögen in einer Ebene liegen. Dann findet man durch eine analoge Rechnung, wie in **70**, zunächst

$$(abcd)\sum a_{ik}x_i u_k' = u'_{a'}(bcdx) - u'_{b'}(cdax) + u'_{c'}(dabx) - u'_{d'}(abcx)$$

und erhält daher, wenn die erste Gleichung in (119) berücksichtigt wird, die Collineation (112) in der Form

$$(123)\quad \begin{aligned} &u'_{a'}(bcdx)(b'c'd'e')(c\,d\,e\,a)(d\,e\,a\,b)(e\,a\,b\,c) - \\ &u'_{b'}(cdax)(b\,c\,d\,e)(c'd'e'a')(d\,e\,a\,b)(e\,a\,b\,c) + \\ &u'_{c'}(dabx)(b\,c\,d\,e)(c\,d\,e\,a)(d'e'a'b')(e\,a\,b\,c) - \\ &u'_{d'}(abcx)(b\,c\,d\,e)(c\,d\,e\,a)(d\,e\,a\,b)(e'a'b'c') = 0. \end{aligned}$$

Diese Gleichung ist in den a_i sowohl als in den a_i' u. s. w. homogen, die Determinante der bilinearen Form links $(a'b'c'd') \ldots (abcd)^2 \ldots$ Wir haben damit den Satz gewonnen:

d. *Ordnet man fünf Punkten (Ebenen) $abcde$ eines räumlichen Systems, von denen keine vier in einer Ebene liegen (durch einen Punkt gehen), fünf Punkte (Ebenen) $a'b'c'd'e'$ eines anderen räumlichen Systems, von denen das Gleiche gilt, bez. zu, so giebt es eine und nur eine Collineation, bei welcher aa', bb', cc', dd', ee' homologe Elemente sind.*

Diese Collineation soll mit $[abcde,\ a'b'c'd'e']$ bezeichnet werden.

Für $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$, $d = d'$, $e = e'$ erhält man für (123) die identische Collineation $u'_x = 0$. Jedes Element des einen Raumes fällt mit dem homologen im anderen zusammen. Also:

e. *Haben zwei collineare Räume fünf Punkte (Ebenen), von denen keine vier in einer Ebene (in einem Bündel) liegen, entsprechend gemein, so haben sie alle Elemente entsprechend gemein.*

Man beweist ferner, wie in **71**:

f. *Zwei collineare räumliche Systeme haben im Allgemeinen die Ecken, Kanten und Seitenebenen eines Tetraeders entsprechend gemein.*

Elemente, die mit ihren homologen zusammenfallen, heissen Doppelelemente oder tautologe*) Elemente der räumlichen Collineation.

79. Besitzt der Punkt x im linearen Coordinatensysteme $abcde$ die Coordinaten $x_1 | x_2 | x_3 | x_4$, der Punkt x' im Systeme $a'b'c'd'e'$ die linearen Coordinaten $x_1' | x_2' | x_3' | x_4'$, so ist

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = x_1' : x_2' : x_3 : x_4',$$

wenn x und x' homologe Punkte der Collineation $[abcde, a'b'c'd'e']$ sind. Denn nach Satz c oben ist

$$ab(cdex) = a'b'(c'd'e'x'),$$

nach **56**

$$ab(cdex) = \frac{x_3}{x_4}, \quad a'b'(c'd'e'x') = \frac{x_3'}{x_4'}$$

und somit

$$\frac{x_3}{x_4} = \frac{x_3'}{x_4'}$$

u. s. w. Für homologe Gerade und Ebenen gilt dasselbe. Besitzt umgekehrt das Element l dieselben DV-Coordinaten im Systeme $abcde$, wie l' im Systeme $a'b'c'd'e'$, und sind ll' gleichartige Elemente, so sind ll' homologe Elemente der Collineation $[abcde, a'b'c'd'e']$.

Haben die räumlichen n-Ecke $abcdef\ldots$ und $a'b'c'd'e'f'\ldots$, wo weder $abcd$ u. s. w. noch $a'b'c'd'$ u. s. w. in einer Ebene liegen, alle graphischen Eigenschaften gemein, so sind dieselben collinear.

Denn f besitzt im linearen Coordinatensysteme $abcde$ dieselben Coordinaten, wie f' in $a'b'c'd'e'$, da die Verhältnisse der homogenen linearen Coordinaten DVe sind. Somit ergiebt sich das Behauptete aus dem vorstehend Gesagten.

80. Den in **73** eingeführten Begriff der Perspektivität wollen wir nunmehr in folgender Weise auf beliebige Figuren ausdehnen:

Wir nennen zwei räumliche n-Ecke (n-Flache) $a_1 a_2 \ldots a_n$

---

*) So bei Baltzer, l. c. § 52.

und $a_1' a_2' \ldots a_n'$ perspektiv, wenn die Geraden $a_1 a_1'$, $a_2 a_2' \ldots a_n a_n'$ durch einen Punkt gehen (in einer Ebene liegen).

Wir betrachten jetzt die Collineation $[abcde, abcd'e']$, welche unter der Voraussetzung, dass die Geraden de und $d'e'$ sich in einem Punkte f der Ebene abc treffen, folgende besondere Eigenschaften zeigt: die Punkte $abcf$ sind tautolog, mithin ist es jedes Element der Ebene $abc = \pi$ (§ 12, Satz f). Der Schnittpunkt p der Geraden dd' und ee' entspricht sich selbst, da die Geraden dd' und ee' tautolog sind. Jedes Element des Bündels p ist tautolog. (Liegt p an π, so geht dies aus dem eben citirten Satze und A hervor). Nur die Elemente, die an p oder π liegen, sind tautologe Elemente (Satz e oben). Abgesehen vom Bündel p und von der Ebene π sind homologe Grundgebilde zweiter Stufe perspektiv. Diese besondere collineare Beziehung zwischen zwei räumlichen Systemen heisst eine perspektive Beziehung, p das Collineationscentrum, π die Collineationsebene. Eine solche Beziehung ist durch das Collineationscentrum p, die Collineationsebene π und ein Paar homologer Punkte aa' bestimmt. Ihre Gleichung lautet

$$\alpha_p \pi_a u_x' - \alpha_a u_p' \pi_x = 0,$$

wenn α eine durch a', aber nicht durch a gehende Ebene bedeutet (75).

Homologe räumliche Figuren heissen hier collinear-perspektiv. Sind zwei n-Ecke $a_1 \ldots a_n$ und $a_1' \ldots a_n'$ im Raume collinear-perspektiv, so gehen nicht nur die Geraden $a_i a_i'$ durch einen Punkt, sondern es schneiden sich auch die Geraden $a_i a_k$ und $a_i' a_k'$, die Ebenen $a_i a_k a_l$ und $a_i' a_k' a_l'$ bez. in den Punkten und Geraden einer Planfigur. Zwei n-Ecke, welche diese Eigenschaft besitzen, sind collinear-perspektiv, d. h. homologe Theile perspektiver Räume (Beweis analog demjenigen für die Ebene in 75). Ueber homologe n-Flache gilt das Reciproke (A).

An einer durch p gehenden Ebene liegen perspektive ebene Systeme aufeinander; jeder Punkt von π ist Träger von aufeinanderliegenden perspektiven Bündeln.

Irgend zwei perspektive Ebenen oder Bündel können stets als homologe Theile perspektiver Räume nachgewiesen werden, wie geometrisch evident ist.

81. Stehen die räumlichen Systeme RR', $R'R''$, ... $R^{(n-1)}R^{(n)}$ bez. in perspektiver Beziehung, so stehen R und $R^{(n)}$ in collinearer — im Allgemeinen nicht perspektiver — Beziehung. Umgekehrt:

g. *Jede collineare Beziehung zwischen zwei räumlichen Systemen kann man durch eine Folge perspektiver Beziehungen zwischen ebensolchen ersetzen.*

Um dies für eine Collineation $[abcde, a'b'c'd'e']$ auszuführen, bezeichnen wir den Schnittpunkt der Geraden ab und der Ebene cde mit f, den homologen Punkt mit f' und schieben zwischen die Vierecke $cdef$ und $c'd'e'f'$ Vierecke $c''d''e''f''$, $c'''d'''e'''f'''$, ... so ein, dass je zwei aufeinanderfolgende perspektiv sind (**74**). Die Collineationen $[cdef, c''d''e''f'']$, $[c''d''e''f'', c'''d'''e'''f''']$ u. s. w. sind perspektiv (Satz h in **73**) und als homologe Theile perspektiver räumlicher Collineationen nachweisbar (**80**). Durch die Verbindung dieser räumlichen Beziehungen gehe a in a_1', b in b_1' über; abf liegen in gerader Linie, also auch $a_1'b_1'f'$, die Geraden $a'b'$, $a_1'b_1'$ treffen sich in einem Punkte f' der Ebene $c'd'e'$, die Collineation $[a_1'b_1'c'd'e', a'b'c'd'e']$ ist eine perspektive (**80**). Aus sämmtlichen perspektiven räumlichen Beziehungen resultirt aber gerade die gegebene. —

h. *Collineare Raumfiguren sind entweder collinear-perspektiv, oder es können zwischen dieselben Figuren so eingeschoben werden, dass je zwei aufeinanderfolgende collinear-perspektiv sind.*

Es sei schliesslich noch bemerkt, dass man auch collineare Raumfiguren projektiv nennt (vgl. **74**); die collineare Verwandtschaft im Raume wird auch als projektive Verwandtschaft (Projektivität) bezeichnet.

82. Wir haben in Artikel **62** die graphischen Eigenschaften der Figuren als solche bezeichnet, welche durch lineare Coordinatentransformation nicht geändert werden. Ferner wurde in den letzten Paragraphen gezeigt, dass die graphischen Eigenschaften einer Figur bei einer collinearen Umformung derselben erhalten bleiben. Da nun sowohl die Transformation der linearen Coordinaten als auch der Uebergang von einer Figur zu einer collinearen mittelst linearer Substitution vollzogen wird, so sagt man, dass die graphischen Eigenschaften der Figuren

durch lineare Substitution unzerstörbare oder dass es **invariante** Eigenschaften der Figuren seien.

Projicirt man eine Planfigur, so übertragen sich dabei die graphischen Eigenschaften derselben auf ihre Projektion und gehen so auf eine collineare Planfigur über (§ 12). Man kann daher die graphischen Eigenschaften der Planfiguren als projektive bezeichnen. Nun wurde aber der Begriff „projektiv“ auf collineare Figuren jeder Art ausgedehnt, und entsprechend hat man auch die graphischen Eigenschaften von Figuren jeder Art projektive Eigenschaften genannt. Die graphischen Begriffe werden demgemäss auch als projektive Begriffe bezeichnet. Dass umgekehrt jeder projektive, d. i. durch Collineation unzerstörbare Begriff ein graphischer ist, kann mittelst der Invariantentheorie gezeigt werden.

In Folge der letzten Ausführungen können wir die Geometrie der Lage auch als die Lehre von den projektiven Eigenschaften der Figuren oder als die **projektive Geometrie** bezeichnen.

Der projektiven Geometrie stellt man die metrische gegenüber, in deren Lehrsätzen (neben graphischen) stets metrische Begriffe auftreten.

Was die Beziehung zwischen Metrik und Projektivität anbelangt, so möge hier noch angemerkt werden, dass die metrischen Begriffe: „Strecke“, „Winkel“ u. s. w. mittelst der unendlich fernen Raumelemente specialisirte projektive Begriffe sind, wie zuerst von Cayley gezeigt worden ist. —

Die linearen Coordinaten eines Elementes in einem Grundgebilde gehen bei geeigneter Wahl des Coordinatensystems auf das homologe Element in einem zu jenem projektiven Grundgebilde über (vgl. 79). Die linearen oder DV-Coordinaten werden daher auch projektive Coordinaten genannt.

§ 14. Reciproke Grundgebilde.

83. Unter Beibehaltung der zu Anfange des Artikels **69** eingeführten Bezeichnungen kann man den Gleichungen daselbst und in Artikel **70** eine neue geometrische Bedeutung unterlegen, wenn man in ihnen durchweg die Veränderlichen

x_i' und u_i' vertauscht. Man erhält die neue Fassung, wenn man in den dortigen Ausführungen jeden graphischen Begriff in der Ebene E' durch den reciproken ebenen Begriff ersetzt. Wir stellen das Wichtigste zusammen.

Durch die Gleichungen

$$(124) \qquad u_i' = a_{1i}x_1 + a_{2i}x_2 + a_{3i}x_3 \quad (i = 1, 2, 3),$$

aus denen bei nicht verschwindender Determinante

$$\Delta = \sum \pm a_{11}a_{22}a_{33}$$

die Gleichungen

$$(125) \qquad \Delta x_i = \alpha_{i1}u_1' + \alpha_{i2}u_2' + \alpha_{i3}u_3' \quad (i = 1, 2, 3)$$

folgen, wird jedem Punkte x der Ebene E eine Gerade u' der Ebene E' zugeordnet und umgekehrt. Für

$$(126) \qquad \Delta x_i' = \alpha_{1i}u_1 + \alpha_{2i}u_2 + \alpha_{3i}u_3 \quad (i = 1, 2, 3)$$

wird

$$u_x = u'_{x'}.$$

Durchläuft der Punkt x in der Ebene E eine Gerade u, so dreht sich die ihm vermöge (124) entsprechende Gerade u' in E' um einen Punkt x', und umgekehrt. In Folge der Gleichungen (124) entspricht somit jeder Geraden u von E ein Punkt x' von E' und umgekehrt. Diese Zuordnungen sind durch (126) und die Gleichungen

$$(127) \qquad u_i = a_{i1}x_1' + a_{i2}x_2' + a_{i3}x_3' \quad (i = 1, 2, 3)$$

gegeben.

Einander entsprechende Elemente heissen homolog.

Die durch die Gleichungen (124) zwischen den Ebenen E und E' hergestellte lineare Verwandtschaft wird eine reciproke oder duale (Reciprocität, Correlation) genannt. Sind zwei ebene Systeme reciprok aufeinander bezogen (reciprok), so entspricht jeder aus Punkten und Geraden irgendwie zusammengesetzten Figur der einen Ebene eine homologe, d. i. aus den homologen Geraden und Punkten zusammengesetzte reciproke Figur in der anderen Ebene.

Die Sätze a und b in **69** gelten auch für reciproke ebene Systeme. Ferner haben wir den Satz:

a. *Sind zwei Planfiguren reciprok, so kommen der einen die reciproken graphischen Eigenschaften der anderen zu.*

Die Reciprocität (124) kann man auch als bilineare Gleichung

$$\sum a_{ik} x_i x_k' = 0 \quad (i;\ k = 1,\ 2,\ 3) \tag{128}$$

schreiben. Sie liefert zu jedem Punkte x von E oder x' von E' die homologe Gerade in E' bez. E, die Gleichung

$$\sum \alpha_{ik} u_i u_k' = 0 \quad (i,\ k = 1,\ 2,\ 3) \tag{129}$$

zu jeder Geraden u von E oder u' von E' den homologen Punkt in E' bez. E.

Sind durch die Reciprocität (124) den Punkten $abcd$, von denen keine drei in gerader Linie liegen, die Geraden $a'b'c'd'$ zugeordnet, so kann man diese Reciprocität in der Form

$$a_{x'}(bcx)(b'c'd')(cda)(dab) + \cdots = 0$$

schreiben. Vgl. (111). Hieraus geht die Richtigkeit des folgenden Satzes hervor:

b. *Ordnet man vier Punkten $abcd$ einer Ebene, von denen keine drei in gerader Linie liegen, vier Gerade $a'b'c'd'$ einer anderen Ebene, von denen keine drei durch einen Punkt gehen, bez. zu, so giebt es eine und nur eine Reciprocität, welche aa', bb', cc' dd' zu homologen Elementen hat.*

84. Man übertrage die Ausführungen des letzten Artikels mittelst des Reciprocitätsgesetzes A auf zwei Bündel, die eingeführten Benennungen beibehaltend.

Bei einer reciproken Beziehung zwischen zwei Bündeln entspricht jedem Strahle des einen eine Ebene des anderen, einem Strahlenbüschel ein projektives Ebenenbüschel u. s. w.

Wir fassen schliesslich in den Gleichungen des vorhergehenden Artikels die x_i' und u_i' als lineare Strahlen- bez. Ebenencoordinaten in einem Bündel S auf, während die x_i und u_i ihre Bedeutung behalten. Alsdann entspricht jedem Punkte x von E eine Ebene u' in S vermöge (124); die umgekehrte Zuordnung giebt (125). Jeder Geraden u in E wird durch (126) ein Strahl x' des Bündels S zugeordnet und

umgekehrt durch (127) jedem x' ein u. Liegt x an u, so liegt u' an x'; x und u', u und x' heissen homolog.

Diese eindeutige, lineare Verwandtschaft zwischen einer Ebene und einem Bündel heisst ebenfalls eine reciproke; homologe Figuren heissen reciprok.

Einer Punktreihe oder einem Strahlenbüschel in E entspricht hier ein projektives Ebenenbüschel bez. Strahlenbüschel in S. U. s. w.

Aus dem Begriffe der reciproken Verwandtschaft ergiebt sich in Verbindung mit **11** und § 12:

c. *Stehen zwei Grundgebilde zweiter Stufe mit demselben dritten in reciproker Beziehung, so sind dieselben unter sich collinear.*

d. *Jede Collineation zwischen Grundgebilden zweiter Stufe lässt sich durch die Verbindung einer geraden Anzahl von Reciprocitäten ersetzen.*

e. *Aus einer collinearen und einer reciproken Verwandtschaft zwischen Grundgebilden zweiter Stufe resultirt eine reciproke Beziehung.*

Reciproke einförmige Grundgebilde sind projektiv. Umgekehrt können zwei projektive einförmige Grundgebilde, abgesehen vom Falle zweier Punktreihen oder Ebenenbüschel, als homologe Theile reciproker Grundgebilde zweiter Stufe nachgewiesen, also auch reciprok genannt werden.

85. Vertauschen wir ferner in den Gleichungen (112)—(118) des Artikels **76** die Veränderlichen x_i' und u_i', p_{ik} und π_{ik}', so haben wir in den Ausführungen, welche sich an jene Gleichungen knüpfen, jeden graphischen Begriff im Raume R' durch den reciproken zu ersetzen.

Unter den a. a. O. gemachten Voraussetzungen entspricht vermöge der Gleichungen

$$(130)\quad u_i' = a_{1i}x_1 + a_{2i}x_2 + a_{3i}x_3 + a_{4i}x_4 \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

jedem Punkte x von R eine Ebene u' von R' und umgekehrt; es ist

$$(131)\quad \triangle x_i = \alpha_{i1}u_1' + \alpha_{i2}u_2' + \alpha_{i3}u_3' + \alpha_{i4}u_4' \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Durch die Gleichungen

$$(132)\quad \triangle x_i' = \alpha_{1i}u_1 + \alpha_{2i}u_2 + \alpha_{3i}u_3 + \alpha_{4i}u_4 \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

aus denen sich

(133) $u_i = a_{i1}x_1' + a_{i2}x_2' + a_{i3}x_3' + a_{i4}x_4' \quad (i = 1, 2, 3, 4)$

ergiebt, wird jeder Ebene u von R ein Punkt x' von R' und umgekehrt zugeordnet. Liegt x an u, so liegt auch u' an x', denn es ist

$$u_x = u'_{x'}.$$

Den Punkten und Ebenen an einer Geraden p von R entsprechen mithin die Ebenen bez. Punkte an einer Geraden p' von R' und umgekehrt. Durch die Gleichungen

(134) $$\pi'_{ik} = a_{12}^{(ik)} p_{12} + a_{13}^{(ik)} p_{13} + \cdots,$$

wird so jeder Geraden p von R eine Gerade p' von R' zugeordnet. Die umgekehrte Zuordnung ist durch

(135) $$\pi_{ik} = a_{ik}^{(12)} p'_{12} + a_{ik}^{(13)} p'_{13} + \cdots$$

gegeben.

Die soeben beschriebene lineare Verwandtschaft zwischen zwei räumlichen Systemen heisst eine reciproke. Wie bei einer Collineation, so entsprechen auch bei einer räumlichen Reciprocität aneinanderliegenden Elementen des einen Raumes ebensolche im anderen. Jeder aus Punkten, Geraden, Ebenen irgendwie zusammengesetzten Figur entspricht eine homologe, d. i. eine aus den zugeordneten (homologen) Elementen — Ebenen, Geraden, Punkten — zusammengesetzte reciproke Figur.

Einer Punktreihe des einen Raumes entspricht ein Ebenenbüschel des anderen, einem Strahlenbüschel des einen Raumes ein ebensolches im anderen. *Homologe einförmige Grundgebilde sind projektiv.*

Einem ebenen Systeme entspricht ein Bündel. Dem Punkte $\varkappa u_a + \lambda u_b + \mu u_c = 0$ der Ebene abc in R entspricht die Ebene $\varkappa a'_{x'} + \lambda b'_{x'} + \mu c'_{x'} = 0$ des zu abc homologen Punktes $a'b'c'$ in R'; $\varkappa | \lambda | \mu$ sind lineare Coordinaten in der Ebene abc bez. im Bündel $a'b'c'$ (§ 7). Also haben wir den Satz (84):

f. *In reciproken räumlichen Systemen sind homologe Grundgebilde zweiter Stufe reciprok.*

Jeder Planfigur entspricht eine reciproke centrische Figur, jeder räumlichen Figur eine reciproke räumliche Figur. Aus dem Vorhergehenden erhellt die Richtigkeit des Satzes:

g. *Jede graphische Eigenschaft von Elementen einer Figur kommt den homologen Elementen einer zu ihr reciproken Figur zu.*

Die Reciprocität (124) wird auch durch die bilinearen Gleichungen

(136) $$\sum a_{ik} x_i x_k' = 0 \quad (i,\, k = 1,\, 2,\, 3,\, 4),$$

(137) $$\sum \alpha_{ik} u_i u_k' = 0 \quad (i,\, k = 1,\, 2,\, 3,\, 4),$$

(138) $$\sum a_{ik}^{(lm)} p_{ik} p_{lm}' = 0$$

dargestellt, wo in der letzten Gleichung für ik alle Combinationen der Ziffern 1, 2, 3, 4 zu je zweien zu setzen sind, ebenso für lm.

Entsprechen bei der Reciprocität (136) fünf Punkten $abcde$, von denen keine vier einer Ebene angehören, die Ebenen $a'b'c'd'e'$, so kann man dieselbe in der Form

$$a_{x'}'(bcdx)(b'c'd'e')(cdea)(deab)(eabc) - \cdots = 0$$

schreiben. Siehe Gl. (123). Damit erhält man den Satz:

h. *Ordnet man fünf Punkten $abcde$ eines räumlichen Systems, von denen keine vier in einer Ebene liegen, fünf Ebenen $a'b'c'd'e'$ eines anderen, von denen keine vier durch einen Punkt gehen, bez. zu, so giebt es eine und nur eine Reciprocität, welche aa', bb', cc', dd', ee' zu homologen Elementen hat.*

Die Sätze c, d, e in Artikel 84 gelten auch für reciproke und collineare Grundgebilde dritter Stufe. —

Bei einer reciproken Beziehung zwischen zwei Grundgebilden zweiter oder dritter Stufe sind homologe einförmige Grundgebilde projektiv. Man nennt daher auch reciproke Grundgebilde zweiter Stufe und dritter Stufe projektiv, ebenso reciproke Figuren jeder Art. Sowohl die collineare als die reciproke Verwandtschaft kann sonach als projektive Verwandtschaft (Projektivität) bezeichnet werden. Man hat die Sätze:

i. *Stehen zwei Grundgebilde mit demselben dritten in projektiver Beziehung, so stehen sie unter sich in projektiver Beziehung.*

k. *Sind zwei Figuren projektiv, so besitzen homologe Bestandtheile gleiche graphische Eigenschaften.*

§ 15. Involutorische Grundgebilde.

86. Haben zwei projektive Grundgebilde g und g', die sich aus denselben Elementen zusammensetzen, nicht jedes Element entsprechend gemein, und es entsprechen sich je zwei homologe Elemente x und x' *doppelt*, d. h. es entspricht dem Elemente x von g das Element x' von g' und zugleich dem Elemente x' von g das Element x von g', so sagt man, dass die beiden projektiven Grundgebilde g und g' involutorisch liegen. Die projektive Beziehung zwischen g und g' heisst in diesem Falle eine involutorische.

Eine involutorische reciproke Beziehung heisst eine Polarreciprocität; homologe Figuren werden hier polarreciprok genannt.

Zwei involutorisch liegende projektive Grundgebilde fasst man häufig als ein einziges involutorisches Grundgebilde auf, d. h. als *ein* Grundgebilde, dessen Elemente involutorisch gepaart sind.

Eine Gruppe von drei oder mehr Elementepaaren eines involutorischen Grundgebildes erster Stufe heisst eine Involution; die Elemente eines jeden Paares heissen conjugirt.

Ein involutorisches Grundgebilde zweiter oder dritter Stufe wird ein involutorisches System oder ein Polarsystem genannt, je nachdem seine Elemente durch eine involutorische Collineation oder eine Polarreciprocität gepaart sind.

In einem ebenen Polarsysteme heisst die homologe Gerade eines Punktes seine Polare, der homologe Punkt einer Geraden ihr Pol.

In einem centrischen Polarsysteme wird von zwei homologen Elementen jedes die Polare des anderen genannt.

In einem räumlichen Polarsysteme endlich heisst die einem Punkte zugeordnete Ebene seine Polarebene oder Polare, der einer Ebene zugeordnete Punkt ihr Pol, von zwei homologen Geraden jede die Polare der anderen. —

Wir gehen zum Schlusse auf die Involutionen näher ein, um zugleich die eingeführten Begriffe an den einförmigen Gebilden zu verdeutlichen.

87. Durch die bilineare Gleichung

$$\sum a_{ik} x_i x_k' = 0 \quad (i, k = 1, 2)$$

werde, wie in **63** und **68**, zwischen zwei aufeinanderliegenden einförmigen Grundgebilden eine projektive Beziehung hergestellt. Wir setzen

$$\sum a_{ik} x_i x_k' = f(xx'), \quad \sum a_{ik} x_i' x_k = f(x'x)$$

und nehmen an, unsere Beziehung $f(xx') = 0$ sei involutorisch. Alsdann muss für je zwei homologe Elemente x und x' nicht nur $f(xx')$, sondern auch $f(x'x)$ verschwinden. Dies ist aber dann und nur dann der Fall, wenn die bilineare Form $f(xx')$ symmetrisch $(a_{ik} = a_{ki})$ oder alternirend $(a_{ik} = -a_{ki})$ ist. Im letzteren Falle wäre aber die Beziehung eine identische. Also: *Die Projektivität $f(xx') = 0$ ist dann und nur dann involutorisch, wenn $f(xx')$ eine symmetrische (binäre) bilineare Form ist.*

Im Falle $a_{12} = a_{21}$ besitzt ferner die quadratische Gleichung $f(xx) = 0$ für $\frac{x_1}{x_2}$ zwei verschiedene Wurzeln, da

$$a_{11}a_{22} - \left(\frac{a_{12} + a_{21}}{2}\right)^2 = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$$

von Null verschieden ist. Also treten hier stets zwei Doppelelemente auf; sie heissen die Ordnungselemente der von den Paaren homologer Elemente gebildeten Involution.

Sind p und q die Ordnungselemente einer Involution, aa' conjugirte Elemente derselben, so ist $(aa'pq) = (a'apq)$ nach Satz c in **65**; also liegen $aa'pq$ harmonisch (8). *Die Ordnungselemente einer Involution werden durch je zwei conjugirte Elemente harmonisch getrennt.*

Aufeinanderliegende projektive Grundgebilde erster Stufe haben involutorische Lage, wenn irgend zwei homologe (nicht zusammenfallende) Elemente einander doppelt entsprechen. Denn entsprechen den Elementen $a\,a'\,b\,b'$ des einen die Elemente $a'\,a\,b'\,b''$ des anderen Grundgebildes, so ist nach **65** und **8**

$$(aa'bb') = (a'ab'b''), \quad (aa'bb') = (a'ab'b),$$

also

$$(a'ab'b'') = (a'ab'b),$$

mithin $b'' = b$. Sind also z. B. in einer Geraden die Punkt-

reihen $aa'bc$ und $a'ab'c'$ projektiv, so sind aa', bb', cc' drei Punktepaare einer Involution.

Eine Involution ist durch zwei Paare conjugirter Elemente aa', bb' bestimmt.

Ist $a = a'$, $b = b'$, so folgt dies aus Obigem. Sind aber etwa a und a' verschieden, so ist die projektive Beziehung $[aa'b, a'ab']$ involutorisch und hat aa', bb' zu homologen Elementen; jede solche Beziehung ist mit ihr einerlei (Satz d in **65**).

Zum Schlusse beweisen wir den für die Involutionen wichtigen ebenen Doppelsatz:

Die drei Paar Gegenseiten eines vollständigen Vierecks werden von jeder Geraden seiner Ebene, welche durch keine Ecke desselben geht, in drei Punktepaaren einer Involution geschnitten.	*Nach den drei Paar Gegenecken eines vollständigen Vierseits gehen aus jedem Punkte seiner Ebene, welcher keiner Seite desselben angehört, drei Strahlenpaare einer Involution.*

Denn trifft eine Gerade die Seiten ab und cd, ac und bd, ad und bc eines ebenen Vierecks $abcd$ bez. in den Punkten kk', ll', mm', schneiden sich ferner ad und bc in e, so sind die Punktreihen $mm'kl$ und $em'bc$ perspektiv (Centrum a), desgleichen die Punktreihen $em'bc$ und $mm'l'k'$ (Centrum d). Also sind die Punktreihen $mm'kl$ und $mm'l'k'$ projektiv, mithin auch $mm'kl$ und $m'mk'l'$ (**68**), d. h. kk', ll', mm' sind drei Punktepaare einer Involution.

Durch die Anwendung des Gesetzes A oder D in § 8 auf diesen Doppelsatz erhält man einen centrischen Doppelsatz, den man selbst aussprechen wolle.

Sachregister.

Die Zahlen beziehen sich auf die Seiten.

Nachtrag und Verbesserungen.

S. 55, Zeile 7, S. 67, Zeile 4 und S. 68, Zeile 21 v. u. Lies „Zugrundelegung“ statt „zu Grundelegung“.

S. 64 ist nach Zeile 3 v. o. einzuschalten:

Denkt man sich in der Gleichung $p_{12}q_{34} + \cdots = 0$ die p_{ik} constant, die q_{ik} veränderlich, so ist dieselbe die Gleichung der Geraden p in Linien- oder Strahlencoordinaten $q_{ik}(n)$.

S. 66, Zeile 15 v. o. Lies „mit den Punkten“ statt „mit einem Punkte“.

S. 70, Zeile 6 v. u. Lies „lineare Coordinaten“ statt „lineare DV-Coordinaten“.